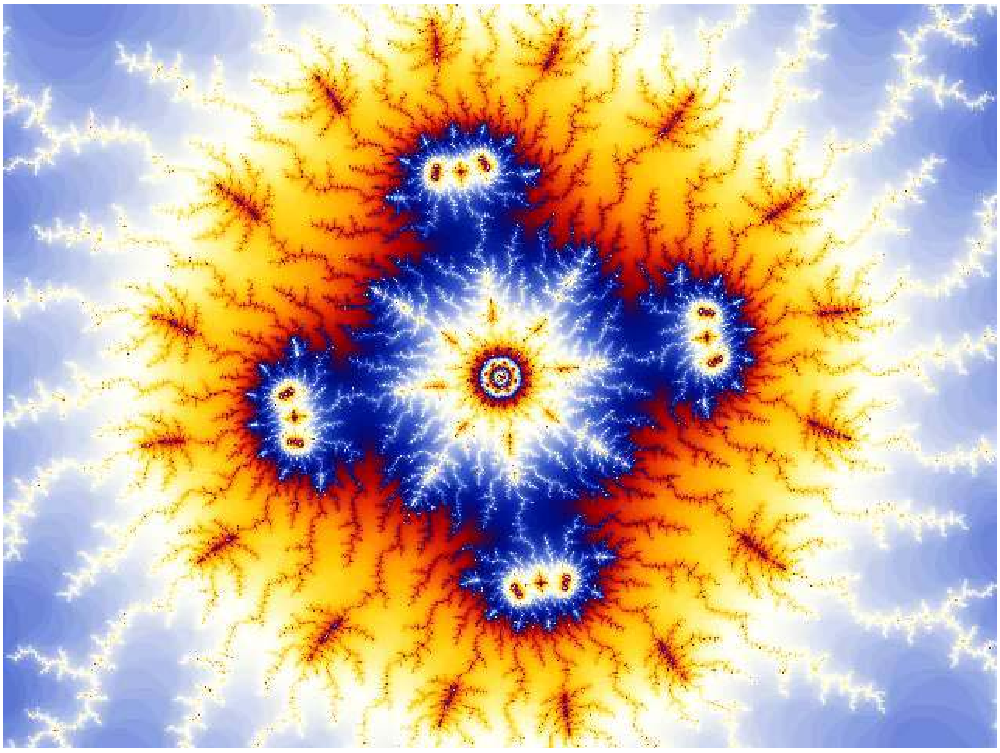
Funzioni esponenziali e logaritmiche



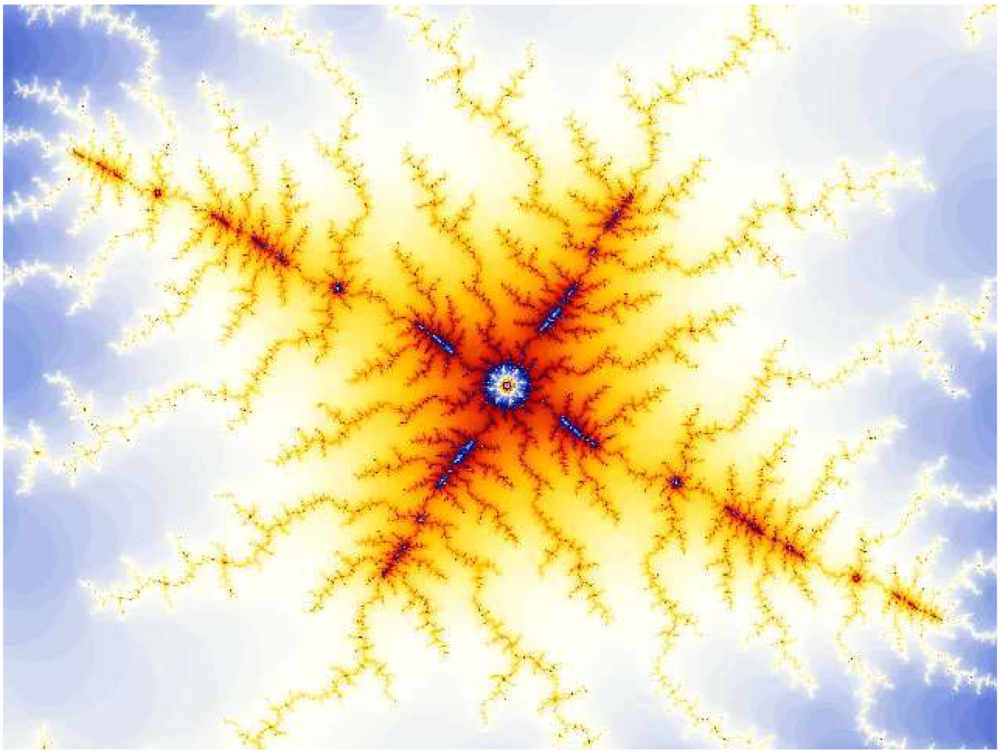
LORENZO ROI

Edizioni H–ALPHA

In copertina è rappresentato un particolare dell'insieme di Mandelbrot centrato sul punto di coordinate $(-1.233039988714179, -0.3165743228110)$ e ingrandito 3.034×10^{15}.

Titolo: `Strutture frattali.`

INDICE



Schizzo frattale

Introduzione

Questa dispensa nasce dall'esigenza di affrontare in modo sufficientemente completo le funzioni esponenziale e logaritmica. Poiché l'esperienza scolastica suggerisce che le nozioni collegate a queste funzioni si riducono spesso alla sola memorizzazione delle regole formali dei logaritmi si è quindi voluto porre l'accento sulla costruzione della funzione esponenziale e sulla deduzione delle relative proprietà. L'obiettivo è quello di favorire un approccio che faccia riferimento alle proprietà non solo per la loro validità formale ma soprattutto per il legame che intercorre con la funzione. Le proprietà non sono pertanto considerate per sé stesse ma in quanto sono espressioni delle caratteristiche delle funzioni studiate.

Per tali motivi gli argomenti presentati richiedono una conoscenza preventiva del concetto di funzione e quindi delle definizioni di dominio e codominio, delle definizioni di funzione iniettiva, suriettiva, biunivoca e delle diverse classificazioni relative alla monotònia. È pure importante disporre del concetto di funzione inversa nonché del significato di trasformazione di simmetria, in particolare della simmetria assiale relativa alla bisettrice del I e III quadrante. Nozioni, eventualmente svolte nel biennio, sul concetto di numero reale sono utili ma non fondamentali in quanto questi aspetti pur basilari per una formalizzazione adeguata, vengono lasciati a livello intuitivo anche nel presente lavoro.

Nel I capitolo si tratta in modo prevalentemente formale dello sviluppo del concetto di potenza fino ad assegnare significato alla potenza con esponenti irrazionali. Le proprietà dimostrate dovrebbero essere per la maggior parte già note dal corso del biennio per cui ad una prima lettura ci si potrebbe limitare ai soli enunciati delle proprietà lasciando ad approfondimenti successivi l'analisi delle dimostrazioni. Sulla base dell'esperienza personale va pure detto che questa prima parte, per il formalismo matematico utilizzato, risulta indubbiamente problematica per l'insegnante intenzionato a proporla e ciò a causa del fatto che sempre più spesso lo studente appare incontrare delle difficoltà là dove lo studio si fa più deduttivo e formale.

Il II capitolo è quello fondamentale in quanto vengono definite la funzioni esponenziale e logaritmica e relative proprietà. Si consiglia di affrontarlo per intero.

Nel III vengono infine presentate le principali classi di equazioni e disequazioni di tipo esponenziale o logaritmico e i diversi approcci risolutivi. Sarà particolarmente utile in questo capitolo leggere con attenzione gli esempi svolti e risolvere gli esercizi proposti. Sia per alcuni esempi che per gli esercizi si è utilizzata la simbologia seguente così da suggerirne il grado di difficoltà e l'importanza

○○ Esempi o esercizi un po' noiosi
◔◔ Esempi e/o esercizi facili
◒◒ Esempi e/o esercizi illustrativi che richiedono un certo impegno
◑◑ Esempi e/o esercizi importanti
◉◉ Esempi e/o esercizi difficili.

mentre la fine di una dimostrazione è indicata dal simbolo □.

CAPITOLO 1

1.1 Potenze con esponente intero

Dall'algebra elementare si conosce il significato di come elevare un numero reale a ad una potenza con esponente intero naturale n. Scritture quindi del tipo 3^2, $(-6)^5$, $(\sqrt{2})^7$ sono ben note e comprensibili. In queste pagine ci proponiamo di estendere gradualmente definizioni e proprietà così da assegnare un significato preciso ad espressioni analoghe dove però l'esponente non sia necessariamente un intero ma in generale appartenga all'insieme $\mathbb{R}$. Dovremo innanzitutto definire espressioni del tipo $a^{m/n}$ con $m/n \in \mathbb{Q}$ e successivamente estendere la scrittura ad un qualsiasi esponente reale irrazionale. Seguiremo quindi un processo graduale che manterrà inalterate le proprietà fondamentali pur estendendole via via ad insiemi sempre più ampi di numeri reali.

Assumiamo quindi a come un numero reale ($a \in \mathbb{R}$) e n sia un numero naturale ($n \in \mathbb{N}$). Sappiamo che *la potenza di un numero a con esponente naturale n (o potenza n–esima del numero a) è il numero reale* a^n definito dalla legge

1.1.1 Definizione di potenza. $$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ volte}} & \text{se } n \geq 2 \\ a & \text{se } n = 1. \end{cases}$$

Per definizione assumiamo pure che se $a \neq 0$ allora l'espressione a^0 valga 1 ossia si pone $a^0 = 1$. Il caso che sia $a = 0$ non si considera per cui *non si assegna alcun significato alla scrittura* 0^0.

Sia ora $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}_0$, numero naturale (zero escluso). Diremo che *la potenza del numero a con esponente intero negativo $-n$ è il numero* $1/a^n$ e si scriverà

1.1.2 Definizione. $$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0).$$

Ancora, al simbolo 0^{-n} *non si assegna alcun significato* quindi non avrà senso parlare di esponente intero negativo dello zero.[1] In definitiva se $a \in \mathbb{R}_0$ e α è un numero intero qualsiasi ($\alpha \in \mathbb{Z}$), l'espressione a^α è definita dalle

$$a^\alpha = \begin{cases} a & \text{se } \alpha = 1 & (1.1) \\ \underbrace{aa \cdots a}_{m \text{ volte}} & \text{se } \alpha = m \quad (m \geq 2) & (1.2) \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 & (1.3) \\ \dfrac{1}{a^n} & \text{se } \alpha = -n \quad (-n \text{ intero negativo}). & (1.4) \end{cases}$$

Sappiamo che nella scrittura a^α, a viene detta la *base* e il numero α, l'*esponente*. Le proprietà elementari già note per la potenza ad esponente intero valgono ancora per cui se $a, b \in \mathbb{R}_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, discendono

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha} \tag{1.6}$$

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta} \tag{1.7}$$

$$\left(\frac{a^\alpha}{a^\beta}\right) = a^{\alpha-\beta} \tag{1.8}$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}. \tag{1.9}$$

Segue la dimostrazione di queste proprietà con lo scopo di sottolineare alcune tecniche elementari utili nel seguito.

1.2 Dimostrazioni delle proprietà

Iniziamo dalla (1.5) ossia $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$. Se $\alpha = n$ con $n \in \mathbb{N}_0$, la proprietà discende direttamente dalle proprietà associativa e commutativa della moltiplicazione tra numeri reali in quanto

$$(ab)^\alpha = (ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \ldots (ab)}_{n \text{ volte}} = ab \cdot ab \cdots ab$$

per cui commutando opportunamente i vari fattori, si giunge alla

$$(ab)^\alpha = \underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{bb \cdots b}_{n \text{ volte}} = a^n \cdot b^n = a^\alpha b^\alpha.$$

[1] Scritture del tipo 0^{-7}, 0^{-10} non sono pertanto definite.

Nel caso $\alpha = 0$ risulta $(ab)^\alpha = (ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0 = a^\alpha \cdot b^\alpha$. Se infine, $\alpha = -m$ con $m \in \mathbb{N}_0$, dalla (1.4) discende

$$(ab)^\alpha = (ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m}$$

che per la prima parte di questa dimostrazione diviene

$$\frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m},$$

dove nell'ultimo passaggio si è considerata una nota proprietà delle frazioni. Riprendendo la (1.4) in definitiva si può scrivere

$$(ab)^\alpha = \cdots = a^{-m} \cdot b^{-m} = a^\alpha \cdot b^\alpha. \ \square$$

Con deduzioni del tutto analoghe si perviene alla dimostrazione della (1.6) mentre per la (1.7) risulta conveniente studiare a parte i 6 casi possibili: se $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$a)\ \alpha = n,\ \beta = m \qquad b)\ \alpha = n,\ \beta = -m \qquad c)\ \alpha = -n,\ \beta = m$$

$$d)\ \alpha = -n,\ \beta = -m \qquad e)\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \beta = 0 \qquad f)\ \alpha = 0,\ \beta \in \mathbb{Z}.$$

Caso a): da $\alpha = n$, $\beta = m$ segue che $a^\alpha a^\beta = a^n a^m$ ossia, sfruttando la proprietà associativa della moltiplicazione

$$\begin{aligned} a^n a^m &= (\underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ volte}}) \cdot (\underbrace{aa \cdots a}_{m \text{ volte}}) \\ &= (\underbrace{aa \cdots a}_{n+m \text{ volte}}) = a^{n+m} = a^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Caso b): $\alpha = n$, $\beta = -m$: dalla definizione (1.4) discende che se $m > n$

$$a^\alpha a^\beta = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m},$$

da cui $a^{n-m} = a^{n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}$. Nel caso sia $n = m$ è pure

$$\frac{a^n}{a^m} = 1 = a^0 = a^{n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}.$$

Se invece $n < m$ è pure

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{a^m} &= \frac{1}{a^m\left(\dfrac{1}{a^n}\right)} = \frac{1}{a^{m-n}} \\ &= a^{-(m-n)} = a^{-m+n} = a^{n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Il caso c) si dimostra in modo analogo al precedente mentre l'eventualità d) presenta $\alpha = -n$ e $\beta = -m$. Allora $a^\alpha a^\beta = a^{-n}a^{-m}$ che per la (1.4) si riscrive

$$a^\alpha a^\beta = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} \qquad \text{da cui} \qquad a^\alpha a^\beta = \frac{1}{a^n a^m} = \frac{1}{a^{n+m}}.$$

In definitiva $a^\alpha a^\beta = a^{-(n+m)} = a^{-n-m} = a^{-n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}$. Nel caso che sia (e) $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $\beta = 0$ discende $a^\alpha a^\beta = a^\alpha \cdot 1 = a^\alpha = a^{\alpha+0} = a^{\alpha+\beta}$ e in modo analogo, si dimostra l'ultima eventualità con $\alpha = 0$ e $\beta \in \mathbb{Z}$. $\square$

La dimostrazione della (1.8) si può ottenere affrontando i 3 possibili casi $n > m$, $n = m$ e $n < m$. Difatti sia $n > m$ con $n, m \in \mathbb{N}$, posto $n = m + l$ (con $l \in \mathbb{N}$) risulta

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^{(m+l)}}{a^m} = \frac{(\overbrace{aa\cdots a}^{m \text{ volte}}) \cdot (\overbrace{aa\cdots a}^{l \text{ volte}})}{\underbrace{aa\cdots a}_{m \text{ volte}}} = a^l = a^{n-m} = a^{\alpha-\beta}.$$

Se $n = m$ è invece

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^n} = a^0 = a^{n-m} = a^{\alpha-\beta}.$$

Se infine $n < m$, posto $m = n + k$ con $k \in \mathbb{N}_0$, tenendo presenti le proprietà della divisione e della moltiplicazione di numeri reali, discende

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^{n+k}} = \frac{\overbrace{aa\cdots a}^{n \text{ volte}}}{(\underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ volte}}) \cdot (\underbrace{aa\cdots a}_{k \text{ volte}})} = \frac{1}{(\underbrace{aa\cdots a}_{k \text{ volte}})} = a^{-k}$$

per cui $a^{-k} = a^{-(m-n)} = a^{n-m} = a^{\alpha-\beta}$. La prova dei 5 casi rimasti b), c), d), e), f) ricalca i procedimenti seguiti per la (1.7). $\square$

Rimane quindi la proprietà (1.9) ossia la $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$. Anche per questa conviene distinguere tutte le eventualità, che sono quelle trattate precedentemente. Caso a): le posizioni $\alpha = n$, $\beta = m$ implicano

$$\begin{aligned}(a^\alpha)^\beta = (a^n)^m &= \underbrace{(a^n)(a^n)\cdots(a^n)}_{m \text{ volte}} \\ &= \underbrace{\underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ volte}} \cdots \underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ volte}}}_{m \text{ volte}}\end{aligned}$$

che per la proprietà associativa della moltiplicazione diviene

$$(a^\alpha)^\beta = (a^n)^m = \cdots = \underbrace{aa\cdots a}_{n\cdot m \text{ volte}} = a^{nm} = a^{\alpha\beta}.$$

Caso b): $\alpha = n$, $\beta = -m$. In accordo con la (1.4) si può scrivere

$$(a^\alpha)^\beta = (a^n)^{-m} = \frac{1}{(a^n)^m}$$

e per quanto dedotto sopra diviene

$$(a^\alpha)^\beta = \cdots = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-nm} = a^{n(-m)} = a^{\alpha\beta}.$$

Caso c): si dimostra in modo analogo al precedente.
Caso d): da $\alpha = -n$, $\beta = -m$ segue

$$(a^\alpha)^\beta = (a^{-n})^{-m} = \frac{1}{(a^{-n})^m} = \frac{1}{a^{-nm}} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a^{nm}}\right)},$$

e tenute presenti le proprietà delle frazioni, l'ultima espressione si può riscrivere come

$$\frac{1}{\left(\dfrac{1}{a^{nm}}\right)} = 1 : \left(\frac{1}{a^{nm}}\right) = a^{nm} = a^{(-n)(-m)} = a^{\alpha\beta}.$$

I rimanenti due casi sono immediati in quanto se $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $\beta = 0$ implica che $(a^\alpha)^\beta = (a^\alpha)^0 = 1 = a^0 = a^{\alpha\cdot 0} = a^{\alpha\beta}$, mentre se $\alpha = 0$ e $\beta \in \mathbb{Z}$ risulta $(a^\alpha)^\beta = (a^0)^\beta = (1)^\beta = 1 = a^0 = a^{0\cdot\beta} = a^{\alpha\beta}$. $\square$

1.3 Potenza con esponente razionale

Per poter estendere le definizioni e proprietà esposte nel paragrafo precedente ad esponenti razionali e non solo interi conviene riassumere prima la definizione di radice n–esima (si legge enneesima) aritmetica di un numero non negativo a.
Il simbolo $b = \sqrt[n]{a}$, con a numero reale non negativo e n numero naturale, indicherà il numero non negativo b tale che $b^n = a$ ossia

$$\sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ n \in \mathbb{N}_0 \\ \sqrt[n]{a} \geq 0 \\ (\sqrt[n]{a})^n = a. \end{cases}$$

Sia ora $a \in \mathbb{R}_0^+$, $r = p/q$ un numero razionale ($r \in \mathbb{Q}$) tale che $q \in \mathbb{N}_0$ ($q > 0$). Per definizione porremo

1.3.1 Definizione. $b = a^r = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ (1.10)

e sarà detta potenza r–esima (erreesima) del numero a. In particolare l'espressione della radice n–esima potrà assumere la forma $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

Presentiamo perciò la dimostrazione delle proprietà che con la definizione sopra sono del tutto analoghe a quelle del precedente paragrafo: in particolare se $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ e $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, seguono le

$$(ab)^{r_1} = a^{r_1} b^{r_1} \tag{1.11}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1} = \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}} \tag{1.12}$$

$$a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2} \tag{1.13}$$

$$\left(\frac{a^{r_1}}{a^{r_2}}\right) = a^{r_1 - r_2} \tag{1.14}$$

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}. \tag{1.15}$$

Per poter giungere alle dimostrazioni delle precedenti proprietà è conveniente ricordare la validità della seguente identità algebrica[2]

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}) \tag{1.16}$$

e le conseguenze che da questa si possono trarre: in particolare, se A e B sono dei *numeri reali positivi* ed n naturale ($n \geq 2$),

$$A = B \Longrightarrow A^n = B^n$$

così come

$$A^n = B^n \Longrightarrow A = B \qquad (A, B \in \mathbb{R}_0^+).$$

Simbolicamente quindi

$$\text{se } A, B \in \mathbb{R}_0^+ \qquad A = B \Longleftrightarrow A^n = B^n. \tag{1.17}$$

Difatti $A = B \Longrightarrow A^n = B^n$ in quanto $A = B \Longrightarrow A - B = 0$ e quindi per la (1.16) anche $A^n - B^n = 0$ cioè $A^n = B^n$. Viceversa, da $A^n = B^n$ discende $A^n - B^n = 0$: per la (1.16) è pure $(A - B)(\cdots) = 0$. Poiché il secondo fattore nella (1.16) $(A^{n-1} + \cdots)$ per ogni intero $n \geq 2$ risulta positivo in quanto somma di potenze positive (è $A, B > 0$), segue che dev'essere $A - B = 0$ e quindi pure $A = B$. □

[2] Identità più volte usata e compresa fra i prodotti notevoli studiati nel corso del biennio: per esempio $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

Dimostrazione della proprietà (1.11), $(ab)^{r_1} = a^{r_1}b^{r1}$. Sia $r_1 = p/q$ con $q \in \mathbb{N}_0$. Partendo da $[(ab)^{r_1}]^q = [(ab)^{p/q}]^q$, per la convenzione di scrittura adottata nel caso delle radici si può scrivere

$$[(ab)^{p/q}]^q = [\sqrt[q]{(ab)^p}]^q$$

e quindi, per la definizione stessa di radice aritmetica

$$[\sqrt[q]{(ab)^p}]^q = (ab)^p.$$

D'altra parte $(ab)^p = a^p b^p$ a seguito della (1.5) (l'esponente p è intero) per cui, sempre in base alla definizione di radice aritmetica $a^p b^p = (\sqrt[q]{a^p})^q(\sqrt[q]{b^p})^q$, ed infine considerando le (1.10) e (1.5) si ha

$$(\sqrt[q]{a^p})^q(\sqrt[q]{b^p})^q = (a^{p/q})^q(b^{p/q})^q = (a^{p/q}b^{p/q})^q.$$

In definitiva

$$[(ab)^{r_1}]^q = [a^{r_1}b^{r_1}]^q$$

che per la (1.17) è equivalente alla $(ab)^{r_1} = a^{r_1}b^{r_1}$ che è la tesi. □
In modo del tutto analogo si giunge alla dimostrazione della (1.12). Per la (1.13) invece si pone $r_1 = p/q$, $r_2 = m/n$. Allora $a^{r_1}a^{r_2} = a^{p/q}a^{m/n}$

$$\left[a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{m}{n}}\right]^{qn} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} \cdot \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{qn}$$

ed essendo qn un numero naturale

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right]^n \cdot \left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right]^q \\
&= \left[\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\right]^n \cdot \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^q \\
&= (a^p)^n \cdot (a^m)^q = a^{pn}a^{mq} = a^{pn+mq} \\
&= \left(\sqrt[nq]{a^{pn+mq}}\right)^{nq} = \left(a^{\frac{pn+mq}{nq}}\right)^{nq}.
\end{aligned}$$

Poiché però $r_1 + r_2 = (pn + mq)/nq$ abbiamo in definitiva dimostrato che

$$(a^{r_1}a^{r_2})^{qn} = (a^{r_1+r_2})^{qn}$$

da cui per la (1.17), la tesi. □

Con identiche considerazioni si procede per la (1.14), mentre rimane da dimostrare la (1.15). A tal fine, posto ancora $r_1 = p/q$, $r_2 = m/n$, risulta

$(a^{r_1})^{r_2} = \left(a^{p/q}\right)^{m/n}$. Tenendo presenti le proprietà con esponente intero e la definizione di radice

$$\begin{aligned}\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}\right]^{nq} &= \left\{\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}\right]^{n}\right\}^{q}\\ &= \left\{\left[\sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{m}}\right]^{n}\right\}^{q} = \left\{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{m}\right\}^{q} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{mq}\end{aligned}$$

e per la (1.9)

$$\begin{aligned}&= \left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q}\right]^{m} = (a^p)^m = a^{pm}\\ &= \left(\sqrt[qn]{a^{pm}}\right)^{qn} = \left(a^{\frac{pm}{qn}}\right)^{qn}.\end{aligned}$$

che per la (1.17) implica la tesi. □
Un caso particolare di questa proprietà risulta essere l'identità

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pn}{qn}},$$

spesso utile nella riduzione di espressioni contenenti esponenziali.
Nota: Va sottolineato come non sia possibile definire potenze ad esponente razionale di numeri negativi senza incorrere in contraddizioni ed ambiguità. Difatti volendo per esempio porre $(-8)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^5}$ si ha

$$(-8)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^5} = \sqrt[3]{-32768} = -32$$

ma poiché $5/3 = 10/6$ dovrebbe pure essere

$$(-8)^{\frac{10}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^{10}} = +32,$$

che pertanto non conferma la proprietà appena dimostrata in quanto $5/3 = 10/6 \implies (-8)^{\frac{5}{3}} \neq (-8)^{\frac{10}{6}}$. Più avanti parlando della funzione radice daremo significato in alcuni casi particolari anche a potenze con esponente razionale a base negativa ma dovremo comunque in tali occasioni rinunciare alla validità delle proprietà formali dimostrate in questa sezione.
Riscriviamo infine le precedenti proprietà nel caso di radici aritmetiche. Se $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ si ha

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \tag{1.18}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \tag{1.19}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}} \tag{1.20}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a^{k-n}} \tag{1.21}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} \tag{1.22}$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a} \tag{1.23}$$

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}. \tag{1.24}$$

Va infine notato che la (1.18) e la (1.19), nel caso che *l'indice n sia pari*, assumono la forma più generale

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|} \tag{1.25}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}, \tag{1.26}$$

in quanto, in tal modo, viene assicurata l'esistenza delle espressioni anche a secondo membro nell'eventualità sia $a < 0 \wedge b < 0$.

1.4 Alcune proprietà riguardanti le diseguaglianze

In quanto segue otterremo alcune importanti proprietà delle potenze con esponente razionale riguardanti le diseguaglianze e che più avanti ci permetteranno di specificare ulteriormente le caratteristiche della funzione esponenziale.
Ripresa la (1.16)

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

e ribadito che se $A > 0$ e $B > 0$ il fattore $(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1})$ risulta positivo ossia

$$(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}) > 0$$

in quanto somma di addendi (potenze) positivi, possiamo facilmente dedurre l'importante implicazione

$$A > B \Longleftrightarrow A^n > B^n. \tag{1.27}$$

Dimostriamo su questa base la seguente

1.4.1 Proprietà. *Sia $a > 1$, $r = p/q$ un numero razionale positivo con $p > 0$ e $q > 0$. Ne segue che $a^r > 1$.*
Difatti dalla definizione di potenza con esponente razionale e da quella di potenza

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q = a^p$$

Poiché $a > 1$ ciò equivale pure alla $a^p > 1^p$ (1.27) che per quanto sopra si riscrive $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q > 1^q$ ossia $(a^r)^q > 1^q$. Ne consegue che per la (1.27) è pure $a^r > 1$. □

In modo simile si giunge all'ulteriore

1.4.2 Proprietà. *Se $0 < a < 1$, $r = p/q > 0$ con $p > 0 \wedge q > 0$, segue che $a^r < 1$.*

Proviamo invece la seguente importante affermazione:

1.4.3 Proprietà. *Se $a > 1$ e $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ segue che $r_1 > r_2 \Longrightarrow a^{r_1} > a^{r_2}$.*
Da $r_1 > r_2$ discende $r_1 - r_2 > 0$ e quindi per la proprietà sopra dimostrata $a^{r_1 - r_2} > 1$. Moltiplicando entrambi i membri di questa diseguaglianza per a^{r_2} e ricordando che questo termine è un numero positivo, si ottiene $a^{r_2}\left(a^{r_1 - r_2}\right) > a^{r_2}$. D'altra parte per la proprietà (1.13) è anche $a^{r_2 + r_1 - r_2} > a^{r_2}$ cioè $a^{r_1} > a^{r_2}$. □

Ancora, con la medesima tecnica si giunge alla

1.4.4 Proprietà. *Se $0 < a < 1$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, $r_1 > r_2 \Longrightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$.*

1.5 Potenze con esponente irrazionale

Dopo aver esteso la notazione di potenza ad esponenti razionali, rimane da assegnare un significato a potenze con un esponente irrazionale. Vogliamo per esempio, definire cosa intendere con la scrittura $3^{\sqrt{2}}$ dove l'esponente $\sqrt{2}$ esemplifica un numero reale irrazionale. Per rispondere a ciò seguiremo un processo intuitivo in quanto solo nell'ambito della teoria dei numeri reali è possibile formalizzare le considerazioni che seguiranno.

Sappiamo che $\sqrt{2}$ si può approssimare per difetto per mezzo dei numeri razionali[3]

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414, \ldots$$

mentre un'approssimazione per eccesso può ottenersi tramite

$$2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415, \ldots$$

[3] Si noti che un numero razionale come per esempio 1,41 può sempre essere scritto nella forma 141/100.

Abbiamo pertanto

$$\begin{array}{rcl} 1 < & \sqrt{2} & < 2 \\ 1{,}4 < & \sqrt{2} & < 1{,}5 \\ 1{,}41 < & \sqrt{2} & < 1{,}42 \\ 1{,}414 < & \sqrt{2} & < 1{,}415 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

In accordo con la proprietà 1.4.3 della precedente sezione discende pure che, poiché $1 < 1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414, \ldots$ è pure[4]

$$3^1 < 3^{1,4} < 3^{1,41} < 3^{1,414} \ldots \tag{1.28}$$

e analogamente

$$3^2 > 3^{1,5} > 3^{1,42} > 3^{1,415} \ldots, \tag{1.29}$$

per cui sembra naturale pensare

$$\begin{array}{rcl} 3^1 < & 3^{\sqrt{2}} & < 3^2 \\ 3^{1,4} < & 3^{\sqrt{2}} & < 3^{1,5} \\ 3^{1,41} < & 3^{\sqrt{2}} & < 3^{1,42} \\ 3^{1,414} < & 3^{\sqrt{2}} & < 3^{1,415} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Il termine $3^{\sqrt{2}}$ è visto pertanto come un numero maggiore di tutti i reali dell'insieme (1.28) e minore di tutti i termini dell'insieme (1.29). In altre parole si può pensare a $3^{\sqrt{2}}$ come quel numero reale che risulta maggiore di 3 elevato a qualsiasi numero razionale che approssima $\sqrt{2}$ per difetto, così come a quel numero che è minore di 3 elevato ad una qualsiasi potenza razionale e che costituisce una approssimazione per eccesso di $\sqrt{2}$.
Un secondo esempio: si vuole "calcolare" 2^π. Poiché

$$\begin{array}{ccc} 3 < \pi < 4 & \Longrightarrow & 2^3 < 2^\pi < 2^4 \\ 3{,}1 < \pi < 3{,}5 & \Longrightarrow & 2^{3,1} < 2^\pi < 2^{3,5} \\ 3{,}14 < \pi < 3{,}15 & \Longrightarrow & 2^{3,14} < 2^\pi < 2^{3,15} \\ 3{,}141 < \pi < 3{,}142 & \Longrightarrow & 2^{3,141} < 2^\pi < 2^{3,142} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

appare evidente che il "numero" 2^π è considerato maggiore dei numeri reali ottenuti assegnando a 2 un esponente (razionale) che approssima π per difetto mentre sarà $2^\pi < 2^r$ con $r \in \mathbb{Q}$ e $r > \pi$.

[4] La base è maggiore dell'unità.

Generalizzando questa procedura sia α un numero reale irrazionale positivo e $a > 1$. Se quindi r_i è un numero razionale qualsiasi minore di α che soddisfa alle $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < \alpha$ e appartenente all'insieme

$$\mathrm{S} = \{r_i \mid r_i \in \mathbb{Q} \wedge r_i < \alpha\}$$

e l_i rappresenta un qualsiasi numero razionale che approssima α per eccesso, soddisfa alle $l_1 > l_2 > l_3 > \cdots > \alpha$ ed appartiene all'insieme

$$\mathrm{T} = \{l_i \mid l_i \in \mathbb{Q} \wedge l_i > \alpha\},$$

si suppone che esista per i due insiemi di numeri reali

$$a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_3} < \cdots$$
$$a^{l_1} > a^{l_2} > a^{l_3} > \cdots$$

un numero reale a^α che sia contemporaneamente maggiore di tutti gli elementi del primo insieme e minore degli elementi del secondo. Chiameremo tale numero l'*estremo superiore* dell'insieme

$$\mathcal{A} = \{a^{r_i} \mid r_i \in \mathbb{Q} \wedge r_i < \alpha\} = \{a^{r_i} \mid r_i \in \mathrm{S}\}$$

e sarà indicato da sup $\mathcal{A}$, mentre per l'insieme

$$\mathcal{B} = \{a^{l_i} \mid l_i \in \mathbb{Q} \wedge l_i > \alpha\} = \{a^{l_i} \mid l_i \in \mathrm{T}\}$$

esso rappresenterà l'*estremo inferiore*, inf $\mathcal{B}$. Ad un livello di conoscenze più avanzato si può dimostrare che **tale "numero" esiste ed è unico.** Questo viene detto l'*elemento separatore* delle due classi contigue $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Sostanzialmente ciò significa che

$$\sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{B}$$

e questa conclusione ci permette di porre la seguente definizione priva di ambiguità

1.5.1 DEFINIZIONE. $\sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{B} = a^\alpha$ *con* $a > 1$ *e* α *irrazionale positivo.*

Con ciò si chiarisce definitivamente il significato della potenza anche per esponenti irrazionali.
Per il primo esempio i vari insiemi delineati sopra risultano

$$\mathrm{S} = \{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414\ldots\}$$
$$\mathrm{T} = \{2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ldots\}$$
$$\mathcal{A} = \{3^1,\ 3^{1,4},\ 3^{1,41},\ 3^{1,414},\ldots\}$$
$$\mathcal{B} = \{3^2,\ 3^{1,5},\ 3^{1,42},\ 3^{1,415},\ldots\}$$

mentre per il secondo

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} &= \{3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141\ldots\}\\
\mathrm{T} &= \{4,\ 3.5,\ 3.15,\ 3.142,\ldots\}\\
\mathcal{A} &= \{2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ 2^{3,141},\ldots\}\\
\mathcal{B} &= \{2^4,\ 2^{3,5},\ 2^{3,15},\ 2^{3,142},\ldots\}
\end{aligned}$$

Poiché inoltre $3^{1,414} \approx 4{,}727695$ e $3^{1,415} \approx 4{,}732891$ vuol dire che le prime due cifre significative di $3^{\sqrt{2}}$ sono 4 e 7 ossia che $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}7$ e la terza potrebbe essere un 2 o un 3. Si verifichi che per l'altro esempio si trova già $2^{\pi} \approx 8{,}82$.
In modo del tutto analogo si procede quando la base risulta un numero positivo minore dell'unità ossia $0 < a < 1$. Per esempio si vuole calcolare $0{,}7^{\pi}$. Definiti gli insiemi S e T (i medesimi riportati sopra), si ha[5]

$$\begin{array}{rcc}
3 < \pi < 4 & \Longrightarrow & (0{,}7)^3 > (0{,}7)^{\pi} > (0{,}7)^4\\
3{,}1 < \pi < 3{,}5 & \Longrightarrow & (0{,}7)^{3,1} > (0{,}7)^{\pi} > (0{,}7)^{3,5}\\
3{,}14 < \pi < 3{,}15 & \Longrightarrow & (0{,}7)^{3,14} > (0{,}7)^{\pi} > (0{,}7)^{3,15}\\
3{,}141 < \pi < 3{,}142 & \Longrightarrow & (0{,}7)^{3,141} > (0{,}7)^{\pi} > (0{,}7)^{3,142}\\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

con

$$\begin{aligned}
&(0{,}7)^3 > (0{,}7)^{3,1} > (0{,}7)^{3,14} > \ldots\\
&(0{,}7)^4 < (0{,}7)^{3,5} < (0{,}7)^{3,15} < \ldots
\end{aligned}$$

dove si è tenuta presente la proprietà 1.4.4 affrontata nel precedente paragrafo. Si pone pertanto in tal caso $\inf \mathcal{A} = \sup \mathcal{B} = (0{,}7)^{\pi}$ ossia in generale

1.5.2 DEFINIZIONE. $\inf \mathcal{A} = \sup \mathcal{B} = a^{\alpha}$ *con* $0 < a < 1$ *e* α *irrazionale positivo.*

L'estensione delle due definizioni appena proposte ad esponenti irrazionali negativi è immediata se poniamo

1.5.3 DEFINIZIONE. $a^{\beta} = \dfrac{1}{a^{-\beta}}$ *con* $\beta < 0$ *e irrazionale.*

Notiamo che $a^{-\beta}$ risulta una potenza ad esponente irrazionale positivo ($\beta < 0$). Se quindi ricordiamo, anche in base alla definizione di potenza ad esponente razionale data nei paragrafi precedenti, che $a^{\alpha} > 0$ ne segue che pure $a^{\beta} > 0$. In generale pertanto, *qualsiasi sia l'esponente reale* α *è sempre* $a^{\alpha} > 0$.

[5] Per evidenziare il cambio del verso delle diseguaglianze si mantiene l'ordine in cui appaiono i diversi termini.

1.5.4 ◔◔ Esempio. *Si vuole calcolare $3^{\sqrt{5}}$ con almeno due cifre decimali corrette. Poiché*

$$\begin{array}{rcl} 2 < \sqrt{5} < 3 & \Longrightarrow & 3^2 < 3^{\sqrt{5}} < 3^3 \\ 2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3 & \Longrightarrow & 3^{2{,}2} < 3^{\sqrt{5}} < 3^{2{,}3} \\ 2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24 & \Longrightarrow & 3^{2{,}23} < 3^{\sqrt{5}} < 3^{2{,}24} \\ 2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237 & \Longrightarrow & 3^{2{,}236} < 3^{\sqrt{5}} < 3^{2{,}237} \\ 2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361 & \Longrightarrow & 3^{2{,}2360} < 3^{\sqrt{5}} < 3^{2{,}2361} \end{array}$$

ossia

$$\begin{array}{c} 9 < 3^{\sqrt{5}} < 27 \\ 11{,}2116 < 3^{\sqrt{5}} < 12{,}5135 \\ 11{,}5873 < 3^{\sqrt{5}} < 11{,}7153 \\ 11{,}6639 < 3^{\sqrt{5}} < 11{,}6767 \\ 11{,}6639 < 3^{\sqrt{5}} < 11{,}6652 \end{array}$$

allora risulta $3^{\sqrt{5}} \approx 11{,}66$.

1.5.5 ◕◕ Esercizio. *Calcolare $(0{,}5)^{\sqrt{7}}$ con due cifre decimali corrette.*

1.5.6 ◕◕ Esercizio. *Si provi a calcolare le prime 4 cifre significative di π^{π} e di $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.*

1.5.7 ◔◔ Esercizio. *Si progetti e si realizzi un foglio di calcolo dove, fissata la base e l'esponente, viene generalizzato il processo di calcolo esposto sopra. Si usino a tal fine l'operazione di elevamento a potenza (tasto* ^*) e la funzione* `ARROTONDA` *dalla sintassi* `ARROTONDA(`*numero o formula*`;`*numero di cifre decimali desiderate*`)`*. Questa fornisce l'arrotondamento di un numero (anche espresso da una formula) al numero desiderato di cifre decimali. Si mostri tramite una rappresentazione grafica come gli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ convergano ad un unico valore.*

Le proprietà delle potenze ad esponente razionale (1.11)...(1.15), si possono estendere anche alle potenze ad esponente reale qualsiasi. Pertanto se $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si dimostrano le seguenti

$$(ab)^{\alpha} = a^{\alpha} b^{\alpha} \tag{1.30}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} \tag{1.31}$$

$$a^{\alpha} a^{\beta} = a^{\alpha+\beta} \tag{1.32}$$

$$\left(\frac{a^\alpha}{a^\beta}\right) = a^{\alpha-\beta} \tag{1.33}$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}. \tag{1.34}$$

Riassumiamo infine i significati della scrittura a^α discussi in questo capitolo. Se quindi $a \in \mathbb{R}_0^+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, a^α è quell'unico numero reale positivo che soddisfa alle seguenti condizioni:

I – se $\alpha > 0$ e

a. $\alpha = m$ con $m \in \mathbb{N}$ $\qquad a^\alpha = \begin{cases} a & \text{se } m = 1 \\ \underbrace{aa\cdots a}_{m \text{ volte}} & \text{se } m \geq 2 \\ 1 & \text{se } m = 0 \end{cases}$

b. $\alpha = \dfrac{1}{q}$ con $q \in \mathbb{N}_0$, $a^\alpha = \sqrt[q]{a}$,

c. $\alpha = \dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, $a^\alpha = \sqrt[q]{a^p}$,

II – α è un numero reale irrazionale, allora

a. se $a > 1$, $a^\alpha = \sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{B}$

b. se $0 < a < 1$, $a^\alpha = \inf \mathcal{A} = \sup \mathcal{B}$,

c. se $a = 1$, $a^\alpha = 1$,

III – se $\alpha < 0$ allora $a^\alpha = \dfrac{1}{a^{|\alpha|}}$.

CAPITOLO 2

2.1 La funzione esponenziale

In base a quanto detto nel capitolo precedente fissato un numero reale $a > 0$ siamo in grado di associare ad un qualsiasi numero reale x, il numero reale positivo a^x. In tal modo è possibile considerare x come una variabile reale e definire una funzione f avente per dominio $\mathbb{R}$ tale che

$$f : x \longrightarrow a^x.$$

Questa funzione verrà chiamata *funzione esponenziale di base a* e sarà indicata come

$$\exp_a : x \longrightarrow y = a^x,$$

mentre la $y = a^x$ sarà la sua equazione rappresentativa.

Vogliamo ora definire alcune sue proprietà partendo dalla ricerca del codominio $\exp_a(\mathbb{R})$. Se $a = 1$ risulta per ogni $x \in \mathbb{R}$, $1^x = 1$, per cui banalmente il codominio è rappresentato dall'insieme $\exp_a(\mathbb{R}) = \{1\}$. Cerchiamo invece di dimostrare come per $a > 0 \wedge a \neq 1$ il codominio della funzione esponenziale sia $\mathbb{R}_0^+$. A tal fine trattiamo prima i casi che si originano quando a) $a > 1 \wedge x > 0$ e poi b) $a > 1 \wedge x < 0$.

2.1.1 Teorema. $a > 1 \wedge x > 0 \Longrightarrow a^x > 1$.

Se $x = p/q$ cioè x è un numero razionale allora per quanto già dimostrato nella proprietà 1.4.1, risulta $a^x > 1$. Se x è al contrario irrazionale allora consideriamo un numero razionale positivo r che approssimi x per difetto ossia $r < x$. Dalla definizione 1.5.1 di potenza irrazionale è pure $a^r < a^x$ ma per la già citata proprietà anche $a^r > 1$. Ne segue che per la proprietà transitiva delle diseguaglianze $1 < a^r < a^x \implies a^x > 1$. $\square$

2.1.2 TEOREMA. $a > 1 \wedge x < 0 \Longrightarrow a^x < 1$.

Se $x < 0$ il numero $\gamma = -x > 0$. Pertanto $a^\gamma > 1$ in base alla precedente discussione. Moltiplicando entrambi i membri dell'ultima diseguaglianza per $a^x > 0$ abbiamo $a^\gamma a^x > a^x$ ossia per le note proprietà $a^{-x}a^x = a^{-x+x} = a^0 = 1$ e quindi $a^x < 1$. □

Le precedenti valgono pure in verso opposto:

2.1.3 TEOREMA. $a > 1 \wedge a^x > 1 \Longrightarrow x > 0$.

2.1.4 TEOREMA. $a > 1 \wedge a^x < 1 \Longrightarrow x < 0$.

Difatti, ragionando per assurdo, neghiamo la tesi del teorema 2.1.3 supponendo che $x \leq 0$. Allora se $x = 0$ sarebbe $a^0 = 1$ per definizione. Se invece $x < 0 \wedge a > 1$ per il teorema 2.1.2 abbiamo $a^x < 1$. Ne segue che $x \leq 0 \Longrightarrow a^x \leq 1$ che contraddice l'ipotesi $a^x > 1$. □

Un'analoga dimostrazione si può proporre per l'altra possibilità. Unendo i risultati dimostrati possiamo affermare che

2.1.5 PROPRIETÀ. *Se $a > 1$ allora valgono alternativamente le diseguaglianze*

$$a^x > 1 \Longleftrightarrow x > 0$$
$$a^x < 1 \Longleftrightarrow x < 0.$$

Nel caso che sia $0 < a < 1$ si giunge con tecniche analoghe al risultato seguente:

2.1.6 PROPRIETÀ. *Se $0 < a < 1$ allora valgono alternativamente le diseguaglianze*

$$a^x > 1 \Longleftrightarrow x < 0$$
$$a^x < 1 \Longleftrightarrow x > 0.$$

I teoremi precedenti ci permettono di giungere alla seguente importante conclusione: la funzione esponenziale risulta essere una funzione strettamente monotòna.

2.1.7 TEOREMA. *Se* $a > 1 \wedge x_2 > x_1 \Longrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$.

Difatti $x_2 > x_1 \Longrightarrow \gamma = x_2 - x_1 > 0$ per cui dalla proprietà precedente $a^\gamma > 1$. Moltiplicando entrambi i membri per il numero positivo a^{x_1} discende $a^\gamma a^{x_1} > a^{x_1}$, ma essendo $a^\gamma a^{x_1} = a^{(x_2-x_1)+x_1} = a^{x_2}$, si trova $a^{x_2} > a^{x_1}$. □

Ovviamente vale pure il viceversa per cui, in definitiva, è possibile stabilire la seguente proprietà di *monotònia strettamente crescente* per la funzione esponenziale di base $a > 1$:

2.1.8 PROPRIETÀ. *Se $a > 1$ allora $x_2 > x_1 \Longleftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$.*

Ancora, nel caso sia $0 < a < 1$, la funzione esponenziale risulta essere *strettamente decrescente* per cui

2.1.9 Proprietà. *Se* $0 < a < 1$ *allora* $x_2 > x_1 \Longleftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$.

Un'ultima proprietà caratterizza la funzione in discussione ed è quella della sua iniettività. È immediato dimostrare che[6]

2.1.10 Proprietà. *Se* $a \neq 1$ *allora per* $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 = x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$.

In base ai precedenti teoremi discende che l'equazione $y = a^x$ ammette $\forall\, y \in \mathbb{R}_0^+$ sempre una soluzione $x \in \mathbb{R}$ e ciò equivale ad affermare che il codominio è l'insieme $\mathbb{R}_0^+$. Pertanto la funzione $\exp_a : x \to a^x$ è caratterizzata dal dominio $\mathbb{R}$ e codomino $\exp_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$, per cui posto

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

essa è automaticamente suriettiva. Avendo d'altra parte affermato pure la sua iniettività, la funzione esponenziale risulta su tali insiemi una *biezione* e quindi è dotata di inversa.

2.2 Rappresentazione grafica di a^x

Siamo ora in grado di rappresentare graficamente ed in modo sufficientemente completo la funzione esponenziale. A tal fine scegliamo una base $a = 2$ e otteniamo un certo numero di coppie (x, y) appartenenti al grafico Γ di $y = 2^x$. (Si costruisca allo scopo un foglio di calcolo dove si faccia uso della funzione potenza ˆ. Onde ottenere un grafico leggibile con facilità si ponga attenzione ai valori della variabile x che dovranno, almeno inizialmente, essere sufficientemente piccoli).

x	2^x
-5	0,03125
-4	0,0625
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
$-0{,}5$	0,7071
0	1
1	2
1,5	2,8284
2	4
3	8
3,5	11,3137
...	...

[6] Va dimostrato prima che se $a \neq 1$ è pure $x = 0 \Longleftrightarrow a^x = 1$.

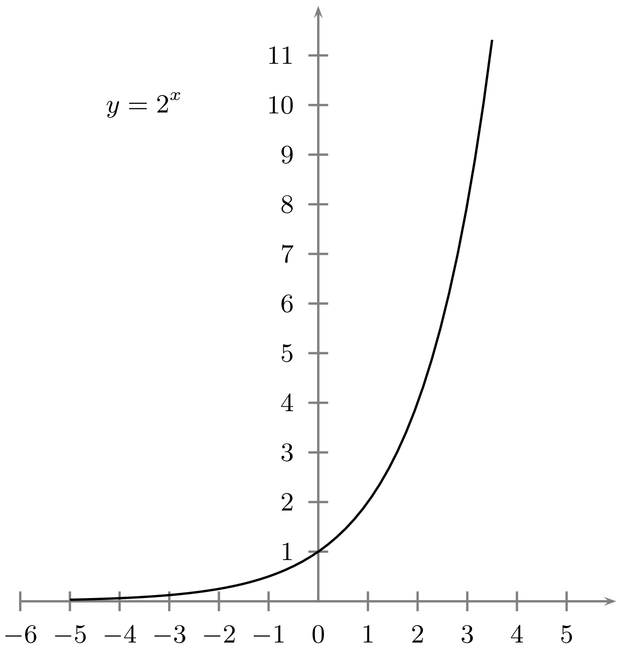


Fig. 2.1 Grafico di $y = 2^x$.

Dalla tabella è immediato notare che sostituendo ad x valori negativi ma crescenti in valore assoluto, i valori che si ottengono per y sono sempre positivi ma decrescenti in valore assoluto, mentre per valori di x positivi e crescenti si ottengono valori di y sempre positivi e pure crescenti. È evidente quindi che al crescere dei valori della variabile indipendente crescono pure i valori corrispondenti di y, confermando in tal modo la aspettata monotònia crescente di 2^x. Il grafico è pertanto rappresentato dalla fig. 2.1 e le osservazioni qualitative sull'andamento si esprimono sinteticamente tramite le due implicazioni

$$\begin{aligned} x \to -\infty \quad &\Longrightarrow \quad y \to 0 \\ x \to +\infty \quad &\Longrightarrow \quad y \to +\infty \end{aligned}$$

che nel corso di Analisi verranno riprese e ulteriormente formalizzate. La prima comunque mette in luce il fatto che la funzione esponenziale possiede un asintoto orizzontale rappresentato dall'asse delle x.
Prendendo ora una base $0 < a < 1$, per esempio $a = 1/2$ dovremo ottenere per la funzione di equazione

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

un grafico strettamente decrescente (proprietà 2.1.9). Difatti calcolando ancora un certo numero di punti

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
$-3{,}5$	11,3137
-3	8
-2	4
-1	2
$-0{,}5$	1,4142
0	1
1	0,5
1,5	0,35355
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,03125
...	...

appare (fig. 2.2) chiaramente soddisfatta una tale proprietà. Gli andamenti all'infinito in tal caso sono

$$
\begin{aligned}
x \to -\infty \quad &\Longrightarrow \quad y \to +\infty \\
x \to +\infty \quad &\Longrightarrow \quad y \to 0.
\end{aligned}
$$

È interessante osservare che il grafico ottenuto per $y = (1/2)^x$ risulta essere il simmetrico rispetto all'asse delle ordinate di quello rappresentativo di $y = 2^x$. Difatti l'immagine di $y = 2^x$ nella trasformazione[7]

$$
\sigma_y : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}
$$

risulta

$$
y' = 2^{-x'}
$$

che per le note proprietà diviene

$$
y' = \left(2^{-1}\right)^{x'} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x'}.
$$

Un tale fatto è generale per cui ad ogni funzione esponenziale con base $a > 1$ di grafico Γ, corrisponderà la funzione $y = (1/a)^x$ avente come grafico l'immagine Γ' ottenuta tramite una simmetria assiale di asse y (fig. 2.3).

[7] Si veda la dispensa sulle trasformazioni § 3.3.

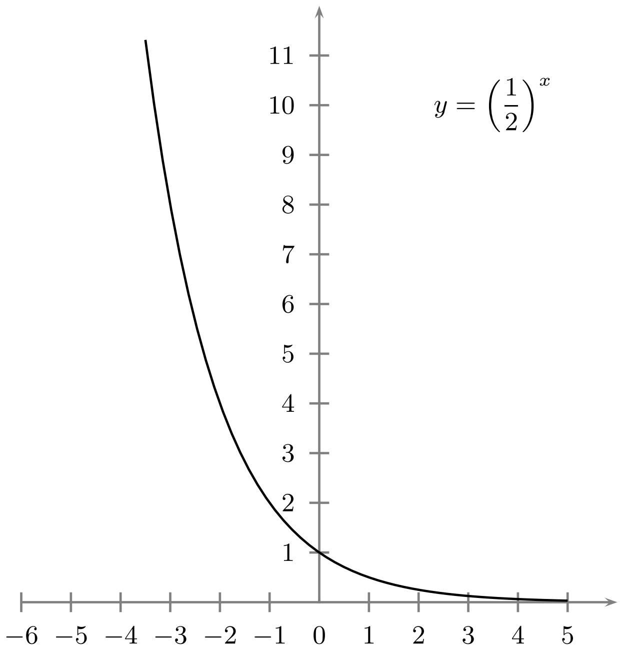


Fig. 2.2 Grafico di $y = (1/2)^x$.

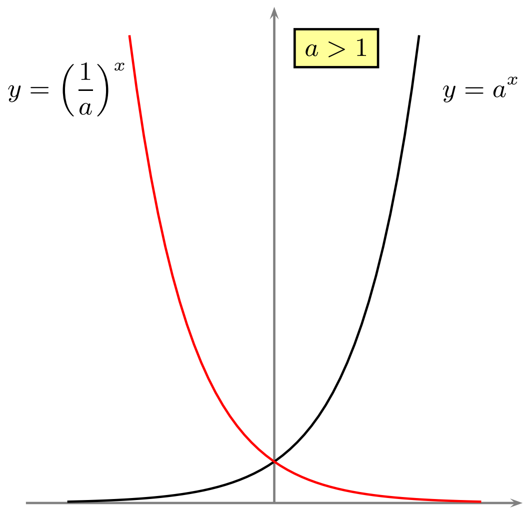


Fig. 2.3 Grafici simmetrici aventi $a > 1$.

2.2.1 ◔◔ Esercizio. *Tenendo presenti le equazioni delle simmetrie assiali di asse x e y così come quelle delle traslazioni, applicare all'equazione $y = a^x$ tali trasformazioni. Ottenute le equazioni trasformate si traccino, al variare di a, i rispettivi grafici rappresentativi.*

Riassumiamo infine sotto e nella pagina seguente le proprietà essenziali discusse finora.

Funzione:	$y = a^x$ con $a > 1$
Dominio:	$\mathbb{R}$
Codominio:	$\mathbb{R}_0^+$
Monotònia crescente:	$x_2 > x_1 \iff a^{x_2} > a^{x_1}$
Limiti:	$x \to -\infty \implies y \to 0$
	$x \to +\infty \implies y \to +\infty$

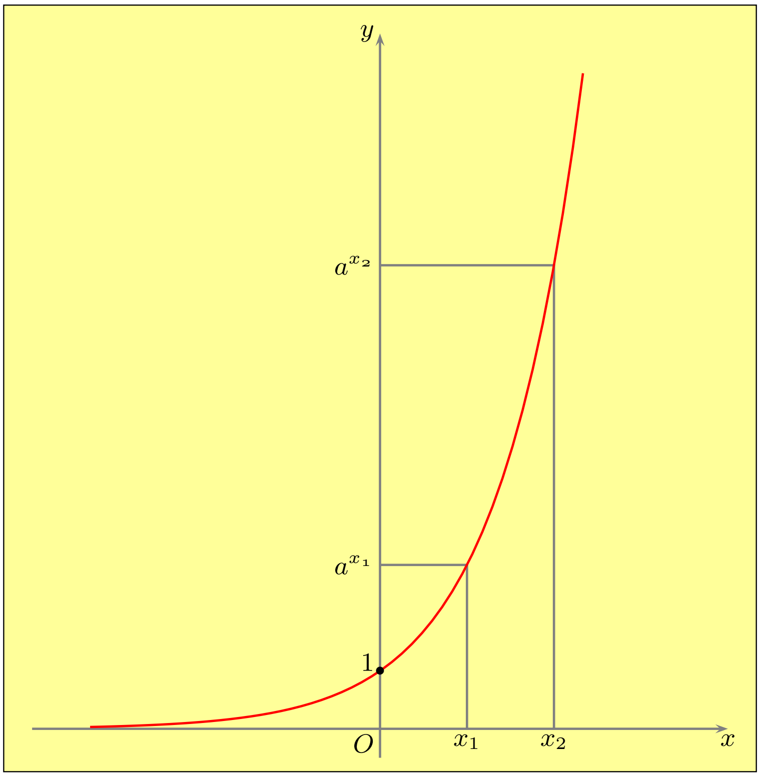


Fig. 2.4 Grafico di $y = a^x$ con $a > 1$.

Funzione:	$y = a^x$ con $0 < a < 1$
Dominio:	$\mathbb{R}$
Codominio:	$\mathbb{R}_0^+$
Monotònia decrescente:	$x_2 > x_1 \iff a^{x_2} < a^{x_1}$
Limiti:	$x \to -\infty \implies y \to +\infty$
	$x \to +\infty \implies y \to 0$

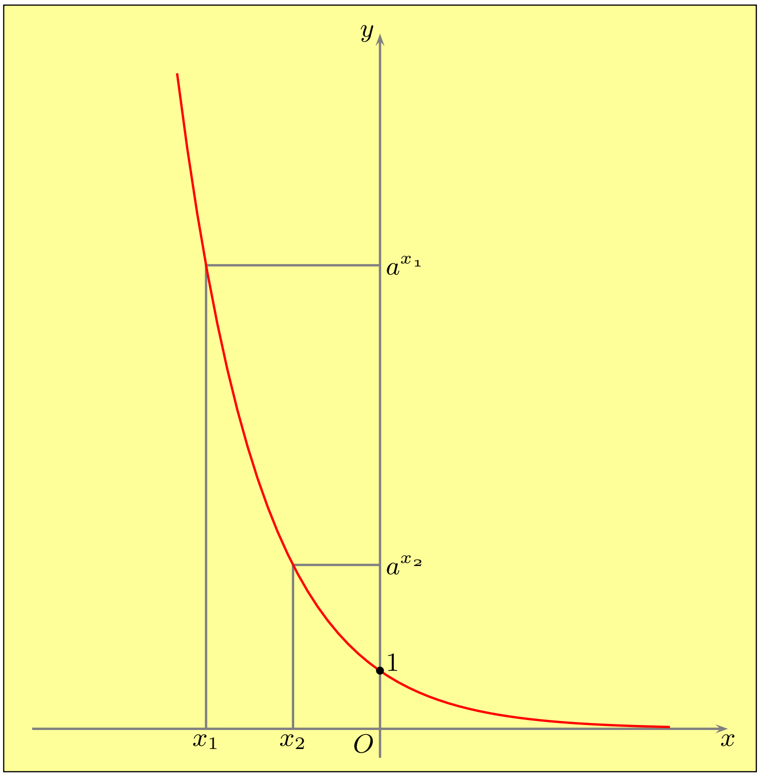


Fig. 2.5 Grafico di $y = a^x$ con $0 < a < 1$.

2.3 La funzione logaritmica

Per quanto detto la funzione esponenziale

$$\exp_a x \in \mathbb{R} \longrightarrow y = a^x \in \mathbb{R}_0^+$$

risulta biunivoca se $a \neq 1$ e quindi è dotata di inversa. Ciò equivale a dire che l'equazione rappresentativa $a^x = y$ è risolvibile univocamente fornendo, *fissato un*

$y > 0$, un unico valore della variabile x considerata ora come variabile dipendente. Il dominio della funzione inversa sarà pertanto l'insieme $\mathbb{R}_0^+$ mentre il codominio $\mathbb{R}$ ossia,

$$y \in \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

La funzione inversa di $\exp_a$ verrà detta *funzione logaritmo di base a* e sarà indicata con il simbolo $\log_a$ o più brevemente $\lg_a$. Formalmente

$$\lg_a : y \in \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow x \in \mathbb{R}, \qquad a \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\} \tag{2.35}$$

mentre l'equazione rappresentativa è

$$x = \lg_a y. \tag{2.36}$$

Pensando y come un valore assegnato è possibile definire il significato di *logaritmo di un numero*: osservando che in $y = a^x$, x è l'esponente che va dato alla base a per ottenere il valore assegnato y è naturale porre pertanto la seguente definizione

2.3.1 Definizione. *Il logaritmo di un numero positivo y nella base $a > 0 \wedge a \neq 1$, è l'esponente che bisogna dare alla base a per ottenere y.*

Qualche semplice esempio numerico chiarirà il significato di questa definizione che successivamente sarà ripresa ed approfondita. Sia per esempio $3^2 = 9$. In tal caso 2 risulta l'esponente che si deve assegnare a 3 per ottenere 9 ossia $2 = \lg_3 9$. Si vuole ancora determinare l'esponente x in modo che valga $10^x = 10000$. Ne segue che $x = \lg_{10}(10000) = 4$ in quanto $10^4 = 10000$. Infine poichè $\sqrt{225} = 225^{\frac{1}{2}} = 15$ segue che $\frac{1}{2} = \lg_{225} 15$.

Ritornando alla funzione logaritmica, diamo di questa una rappresentazione grafica evidenziandone innanzitutto le proprietà generali. Per ottenere il grafico di $x = \lg_a y$, inversa di $\exp_a$ sappiamo di dover applicare la trasformazione

$$\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$$

che rappresenta una simmetria assiale avente per asse la bisettrice del I e III quadrante. In tal modo manteniamo la convenzione che associa alla variabile indipendente l'asse orizzontale di un sistema cartesiano (e la lettera x) e ad y l'asse verticale.[8] Ne discende per $a > 1$ la figura 2.6 mentre per $a < 1$ si ottiene la 2.7.
Appaiono ora immediate le proprietà di monotònia della funzione logaritmo: se

[8] Si veda, per un procedimento analogo, la dispensa sulle funzioni inverse delle goniometriche § 1.1.

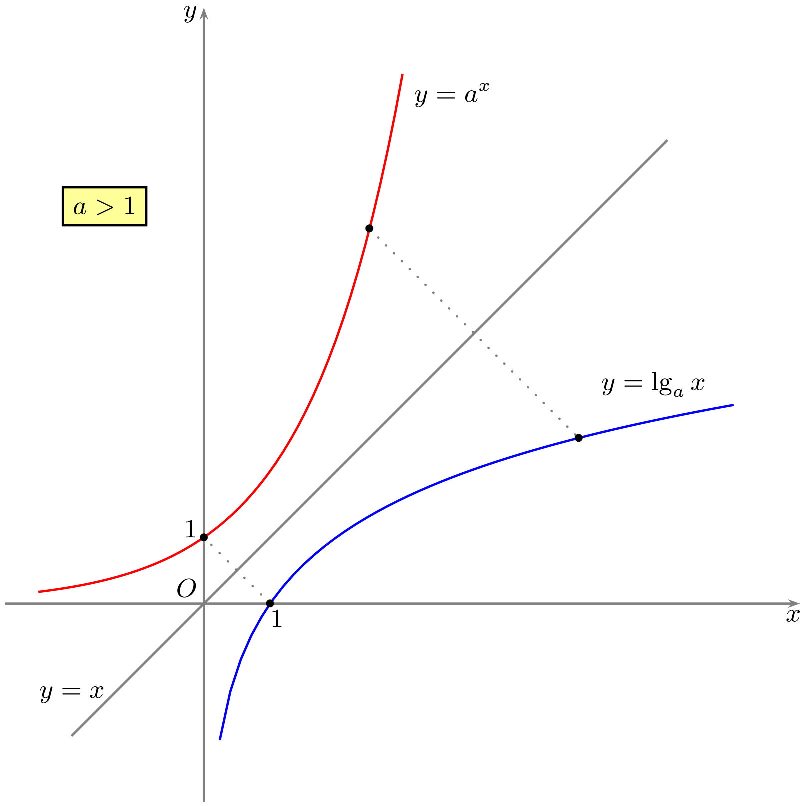


Fig. 2.6 Grafico di $y = \lg_a x$ e $y = a^x$ $(a > 1)$.

$$a > 1 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \qquad x_2 > x_1 \Longleftrightarrow \lg_a x_2 > \lg_a x_1 \tag{2.37}$$

la funzione logaritmo risulta monotòna crescente, mentre se

$$0 < a < 1 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \qquad x_2 > x_1 \Longleftrightarrow \lg_a x_2 < \lg_a x_1 \tag{2.38}$$

il logaritmo è strettamente decrescente.[9] Conviene sottolineare pure la biunivocità della funzione, proprietà sintetizzata dalle uguaglianze

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \qquad x_1 = x_2 \Longleftrightarrow \lg_a x_1 = \lg_a x_2. \tag{2.39}$$

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio, osservando il grafico rappresentativo, risulta che per $a > 1$

[9] Sappiamo comunque che una funzione dotata di inversa possiede assieme a questa il medesimo carattere di monotònia.

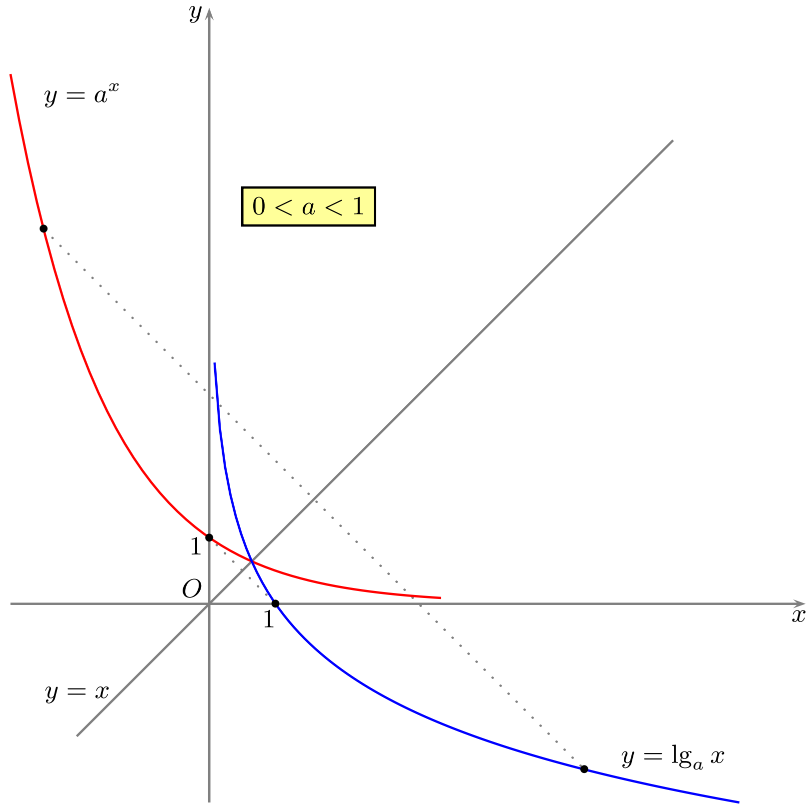


Fig. 2.7 Grafico di $y = \lg_a x$ e $y = a^x$ $(0 < a < 1)$.

$$\begin{aligned} x \to 0^+ \quad &\Longrightarrow \quad y \to -\infty \\ x \to +\infty \quad &\Longrightarrow \quad y \to +\infty \end{aligned}$$

mentre per $0 < a < 1$ è

$$\begin{aligned} x \to 0^+ \quad &\Longrightarrow \quad y \to +\infty \\ x \to +\infty \quad &\Longrightarrow \quad y \to -\infty. \end{aligned}$$

La funzione logaritmo possiede quindi in entrambi i casi un asintoto verticale coincidente con l'asse delle y.
Inoltre, per ogni $a > 0$ vale la

$$\lg_a 1 = 0,$$

espressione che discende direttamente dalla definizione di potenza ad esponente nullo dove si era stabilito $a \neq 0 \Longrightarrow a^0 = 1$. Per gli stessi motivi, poiché $a^1 = a$

risulta

$$\lg_a a = 1.$$

Dai due grafici è pure immediato notare che il logaritmo di x in una base $a > 1$ è positivo quando il suo argomento risulta $x > 1$ mentre se $0 < x < 1$ è $\lg_a x < 0$. Viceversa se $0 < a < 1$.

Ricordando infine le considerazioni fatte circa la composizione di una funzione $f : A \to B$ con la propria inversa[10] $f^{-1} : B \to A$ e che portavano a definire la funzione identità in termini di f e f^{-1}, la loro applicazione nel presente caso ($A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}_0^+$) implica le identità

$$f^{-1} \circ f = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = \mathbb{R}_0^+$$

che in termini di equazioni rappresentative, assumono rispettivamente le forme fondamentali

$$f^{-1}[f(x)] = \lg_a a^x = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{2.40}$$

$$f[f^{-1}(y)] = a^{\lg_a y} = y \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}_0^+. \tag{2.41}$$

Tali espressioni si ottengono prima sostituendo nella $x = \lg_a y$ la $y = a^x$, mentre la seconda si deduce dalla $y = a^x$ ponendo $x = \lg_a y$ in luogo dell'esponente.

2.4 Proprietà dei logaritmi

Una delle proprietà più importanti della funzione esponenziale riguarda il modo con cui si compongono gli esponenti a seguito della moltiplicazione di due suoi valori ossia $a^x a^z = a^{x+z}$. In effetti, si può dimostrare che la funzione esponenziale è l'unica funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ che soddisfa ad una tale proprietà che si riscrive, in forma più generale, come

$$\forall\, a > 0 \wedge a \neq 1 \qquad f(1) = a, \quad f(x)f(y) = f(x+y) \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

A questa si collega la fondamentale proprietà dei logaritmi

$$\lg_a(xz) = \lg_a x + \lg_a z \qquad x, z \in \mathbb{R}_0^+, \tag{2.42}$$

che si può enunciare come

[10] Dispensa funzioni § 2.6.

2.4.1 PROPRIETÀ. *Il logaritmo di un prodotto di due numeri positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori.*
Difatti posto

$$\lg_a x = m \quad \text{e} \quad \lg_a z = n, \tag{2.43}$$

discende dalla definizione di logaritmo che $a^m = x$ e $a^n = z$. Moltiplicando i membri di queste due uguaglianze $a^m a^n = xz$ per cui, tenendo conto della proprietà dell'esponenziale ricordata all'inizio

$$a^{m+n} = xz. \tag{2.44}$$

Ma per definizione di logaritmo ne segue che

$$m + n = \lg_a(xz)$$

per cui sostituendovi le (2.43) si giunge a

$$\lg_a(xz) = \lg_a x + \lg_a z \qquad x, z \in \mathbb{R}_0^+. \ \square$$

2.4.2 ESEMPIO. *L'espressione* $\lg_3 5 + \lg_3 6 + \lg_3(27/10)$ *si può riscrivere come*

$$\begin{aligned}\lg_3 5 + \lg_3 6 + \lg_3\left(\frac{27}{10}\right) &= \lg_3\left(5 \cdot 6 \cdot \frac{27}{10}\right)\\ &= \lg_3\left(30 \cdot \frac{27}{10}\right) = \lg_3 81\end{aligned}$$

ed essendo $3^4 = 81$ *risulta* $\lg_3 81 = 4$.

Conviene già da ora sottolineare che la (2.42) va comunque attentamente considerata in quanto, può capitare che esista il logaritmo del prodotto $\lg_a(xz)$ ma non quello dei singoli fattori: in tal caso sarebbe $x < 0 \wedge z < 0$. Per togliere questa possibile fonte d'errore e generalizzare la (2.42) anche a fattori del prodotto entrambi negativi si scriverà

$$xz > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lg_a(xz) = \lg_a|x| + \lg_a|z|. \tag{2.45}$$

In particolare risulta quindi[11]

$$\lg_a x^2 = \lg_a(x \cdot x) = \lg_a|x| + \lg_a|x| = 2\lg_a|x|. \tag{2.46}$$

È evidente che non nasce alcuna ambiguità se si fa uso della proprietà procedendo dai singoli logaritmi addendi al logaritmo del prodotto e ciò in quanto ciascun addendo avrà il rispettivo argomento necessariamente positivo.

[11] Una situazione analoga si presenta quando si tratta $\sqrt{ab}$. Si vedano le (1.25), (1.26).

2.4.3 ◑◑ ESEMPIO. *Le espressioni* $\lg_{10}(-5)$ *e* $\lg_{10}(-2)$ *non hanno alcun significato in quanto gli argomenti sono negativi. D'altra parte* $\lg_{10}[(-5)\cdot(-2)] = \lg_{10} 10 = 1$ *è un'espressione corretta. Volendo riscriverla come somma di due logaritmi si può incorrere nell'errore di porre*

$$\lg_{10}[(-5)\cdot(-2)] = \lg_{10}(-5) + \lg_{10}(-2)$$

manifestamente errata mentre risulta corretta la

$$\lg_{10}[(-5)\cdot(-2)] = \lg_{10}|-5| + \lg_{10}|-2|.$$

In modo del tutto analogo si giunge alla

$$\lg_a\left(\frac{x}{z}\right) = \lg_a x - \lg_a z \qquad x, z \in \mathbb{R}_0^+, \tag{2.47}$$

il cui enunciato è:

2.4.4 PROPRIETÀ. *Il logaritmo di un rapporto di due numeri positivi è uguale alla differenza del logaritmo del numeratore con quello del denominatore.*

Difatti, con le posizioni (2.43), dividendo $a^m = x$ e $a^n = z$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{x}{z}$$

che, a seguito della proprietà dell'esponenziale, porta alla

$$a^{m-n} = \frac{x}{z}.$$

Per la definizione di logaritmo $m-n$ rappresenta l'esponente della base a per ottenere x/z cioè

$$m - n = \lg_a\left(\frac{x}{z}\right)$$

ossia

$$\lg_a\left(\frac{x}{z}\right) = \lg_a x - \lg_a z. \ \square \tag{2.48}$$

Le osservazioni circa le attenzioni da porre sull'applicabilità della precedente proprietà sono qui ancora valide per cui riscriviamo la (2.47) come

$$\frac{x}{z} > 0 \qquad \lg_a\left(\frac{x}{z}\right) = \lg_a|x| - \lg_a|z|. \tag{2.49}$$

2.4.5 ESEMPIO. $\lg_2 40 - \lg_2 10 = \lg_2(40/10) = \lg_2 4$ *ma* $\lg_2(2\cdot 2)$ *per cui sfruttando la (2.46) si trova che* $\lg_2 4 = 2\lg_2 2 = 2$. *In alternativa, notato che* $40 = 4\cdot 10$ *è* $\lg_2 40 - \lg_2 10 = \lg_2(4\cdot 10) - \lg_2 10 = \lg_2 4 + \lg_2 10 - \lg_2 10 = \lg_2 4 = 2\lg_2 2 = 2$.

È interessante notare il legame esistente tra i logaritmi di numeri reciproci. Volendo infatti calcolare $\lg_a(1/x)$ si ha

$$\lg_a\left(\frac{1}{x}\right) = \lg_a 1 - \lg_a x = 0 - \lg_a x = -\lg_a x,$$

che mostra come numeri reciproci tra di loro (x e $\frac{1}{x}$) abbiano logaritmi opposti. Dimostriamo ora la

$$\lg_a x^\alpha = \alpha \lg_a x \qquad \alpha \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}_0^+, \tag{2.50}$$

che si enuncia come

2.4.6 Proprietà. *Il logaritmo di una potenza di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base della potenza.*

Posto $\lg_a x = m$ che per la definizione di logaritmo equivale a $a^m = x$, e a seguito della biunivocità della funzione esponenziale, possiamo elevare alla potenza α entrambi i membri di quest'ultima ottenendo $(a^m)^\alpha = x^\alpha$. D'altra parte è pure $a^{\alpha m} = x^\alpha$ che, riutilizzando la definizione di logaritmo implica

$$\alpha m = \lg_a(x^\alpha)$$

ossia, per la posizione iniziale

$$\alpha \lg_a x = \lg_a(x^\alpha).\ \square$$

Come nelle precedenti proprietà, è importante sottolineare la positività della base in quanto se ciò non fosse vero si giungerebbe a delle scritture prive di significato quali, per esempio la seguente $\lg_2(-3)^4 = 4\lg_2(-3)$, dove il primo membro rappresenta un numero reale mentre il secondo non possiede significato. L'identità che contempla quei casi di potenza pari $\alpha = 2n$ con $n \in \mathbb{N}$ e base (della potenza) negativa si dimostra invece essere

$$\lg_a x^{2n} = 2n \lg_a |x| \qquad x \in \mathbb{R}_0. \tag{2.51}$$

L'esempio sopra si scrive quindi $\lg_2(-3)^4 = 4\lg_2|-3|$. Ricordiamo che nel caso fosse $x < 0$ e α qualsiasi l'espressione x^α non è *in generale* definita (cap.1).

2.4.7 Esempio. *Riscrivere, semplificandole, le espressioni:*

$$\lg_{3,5} 3^\pi \qquad \lg_\pi \pi^{\sqrt{2}} \qquad \lg_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \qquad \lg_5(\operatorname{sen} x)^6 \qquad \lg_5 \sqrt[3]{25}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
\lg_{3,5} 3^{\pi} &= \pi \lg_{3,5} 3 \\
\lg_{\pi} \pi^{\sqrt{2}} &= \sqrt{2} \lg_{\pi} \pi = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \\
\lg_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} &= \lg_{\sqrt{2}} \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \lg_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^{-2} = -2 \\
\lg_5 (\operatorname{sen} x)^6 &= 6 \lg_5 |\operatorname{sen} x| \\
\lg_5 \sqrt[3]{25} &= \lg_5 (25)^{\frac{1}{3}} = \lg_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \lg_5 5 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Si noti che la proprietà (2.40) delineata nel paragrafo precedente $\lg_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ risulta ora essere un caso particolare della (2.50) in quanto, per $a \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$

$$\lg_a a^x = x \lg_a a = x.$$

Utilizzando invece la (2.41) riscritta come

$$x = a^{\lg_a x},$$

e prendendo i logaritmi di entrambi i membri in una base positiva qualsiasi b discende

$$\lg_b x = \lg_b \left(a^{\lg_a x}\right)$$

che per l'ultima proprietà dimostrata diviene

$$\lg_b x = \lg_a x \cdot \lg_b a.$$

Dividendo per $\lg_b a$ risulta in definitiva

$$\lg_a x = \frac{\lg_b x}{\lg_b a}, \quad \square \tag{2.52}$$

relazione che permette di conoscere i logaritmi nella base a, noti quelli nella base b. Tale identità, detta *formula del cambiamento di base dei logaritmi*, assume pertanto una notevole importanza in quanto permette di passare da un logaritmo in una data base ad un altro di base diversa.
Detto in altro modo, siano $y_1 = \lg_a x$ e $y_2 = \lg_b x$ due funzioni logaritmiche aventi basi $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$. Per la (2.52) si può scrivere

$$y_1 = \frac{y_2}{\lg_b a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_2 = (\lg_b a) y_1$$

e quindi concludere che entrambe sono proporzionali, con $\lg_b a$ come coefficiente di proporzionalità. Ciò significa che è sufficiente conoscere la funzione logaritmica relativa ad una certa base per ottenere quindi la funzione stessa in corrispondenza di una qualsivoglia altra base. È questo il motivo per cui le cosiddette *"tavole dei logaritmi"* riportano questi relativamente ad un'unica base (quella decimale $a = 10$) e i calcolatori tascabili (e non) ne presentano in genere due (la decimale e quella neperiana con $a = 2{,}718\ldots$).

2.4.8 Esempio. *Si vuole esprimere $\lg_{25} 225$ in termini di logaritmi decimali ridotti ai minimi termini. Facendo uso delle proprietà viste e della (2.52)*

$$\lg_{25} 225 = \lg_{25} 15^2 = 2\lg_{25} 15 = \frac{2\lg_{10} 15}{\lg_{10} 25}$$

ossia

$$= \frac{2\lg_{10} 15}{\lg_{10} 5^2} = \frac{2\lg_{10} 15}{2\lg_{10} 5} = \frac{\lg_{10} 15}{\lg_{10} 5}.$$

D'altra parte $15 = 3 \cdot 5$ per cui

$$\lg_{25} 225 = \frac{\lg_{10} 3 + \lg_{10} 5}{\lg_{10} 5} = 1 + \frac{\lg_{10} 3}{\lg_{10} 5}.$$

Si noti infine che, posto $x = b$ nella (2.52) discende che

$$\lg_a b = \frac{\lg_b b}{\lg_b a} = \frac{1}{\lg_b a} \tag{2.53}$$

che mostra come si possono intercambiare base ed argomento in un logaritmo.

2.5 Calcolo di logaritmi

Dopo aver esposto le proprietà dei logaritmi e prima di applicarle più approfonditamente, è opportuno mostrare come si procede nel calcolo esplicito del logaritmo di un numero. Ciò ci permetterà di evidenziare alcune ragioni che motivano le scelte comunemente operate per la base dei logaritmi.

Generalmente un numero reale viene espresso nella rappresentazione in base 10 e solo in contesti particolari (per esempio nell'ambito informatico) lo si esprime in una diversa base (2 o 16). È quindi naturale scegliere come base dei logaritmi il numero 10 cioè $a = 10$. In tal caso i logaritmi si dicono *decimali*. Conviene inoltre scegliere una nuova notazione che ci risparmi di riportare continuamente la base 10. Scegliamo pertanto di scrivere

$$\lg_{10} x = \log x \tag{2.54}$$

omettendo la base in quanto sembra che tale notazione venga in genere rispettata nelle calcolatrici scientifiche tascabili di uso più comune.[12] Su tali calcolatori il tasto del logaritmo decimale è indicato da $\boxed{\texttt{log}}$ mentre quello corrispondente all'esponenziale è rappresentato da $\boxed{\texttt{10}^{\texttt{x}}}$.
Vogliamo pertanto calcolare il $\log 27$. Posto quindi $x = \log 27$, per definizione di logaritmo è anche $10^x = 27$. D'altra parte valendo le diseguaglianze

$$10 < 27 < 100$$

cioè sostituendo $27 = 10^x$

$$10^1 < 10^x < 10^2,$$

possiamo concludere in base alla monotònia crescente dell'esponenziale che

$$1 < \log 27 < 2,$$

espressione che permette di stabilire la prima cifra significativa. È quindi $\log 27 = 1, \ldots$. Prendendo ora un valore intermedio tra 1 e 2, per esempio 1,5 e calcolando $10^{1{,}5} = 10^{3/2} = \sqrt{1000} = 31{,}6228$ possiamo pure scrivere[13]

$$10 < 27 < 31{,}6228$$

ossia ancora

$$10^1 < 10^x < 10^{1{,}5}$$

e concludere che

$$1 < \log 27 < 1{,}5.$$

Abbiamo così ristretto l'intervallo dei possibili valori per $\log 27$ ed è evidente che in base alla conoscenza della funzione esponenziale per qualsiasi valore reale del suo esponente, tale processo si può ripetere fino alla voluta approssimazione. Scegliendo un ultimo valore tra 1 e 1,5 per esempio 1,4 e dato che $10^{1{,}4} = 25{,}1189$ valgono pure le

$$25{,}1189 < 27 < 31{,}6228 \qquad 10^{1{,}4} < 10^x < 10^{1{,}5}$$

ossia

---

[12] In realtà nei testi, sembra esserci una certa confusione nelle notazioni in quanto altri autori indicano il logaritmo a base decimale come $\lg_{10} x = \operatorname{Log} x$.

[13] I valori riportati sono arrotondati alla 4^a cifra decimale.

$$1{,}4 < \log 27 < 1{,}5$$

che quindi fornisce già la seconda cifra significativa.
Per i logaritmi decimali (detti anche *volgari* o di *Briggs*) è immediato riconoscere la prima cifra significativa del logaritmo (di un numero maggiore di 1) in quanto basta a tal fine inquadrare il numero dato tra due potenze di 10. Per esempio sarà $\log 257 = 2, \ldots$ in quanto $10^2 < 257 < 10^3$, $\log 1246{,}7 = 3, \ldots$ essendo $10^3 < 1246{,}7 < 10^4$ e in generale, se il numero x di cui si vuole calcolare il logaritmo possiede una parte intera costituita da n cifre, allora è $\log x = (n-1), \ldots$.

Mostriamo ora come sia possibile riportare il calcolo del logaritmo di un numero $x < 1$ a quello di un numero maggiore di 1. Calcoliamo quindi $\log 0{,}27$. Poichè si può scrivere $\log(27 \cdot 10^{-2})$, per la (2.42) è anche $\log 0{,}27 = \log 27 + \log 10^{-2} = \log 27 - 2\log 10 = \log 27 - 2$, da cui, per quanto sopra $\log 0{,}27 \approx -0{,}6$.[14] Come si vede quindi, due numeri x e y che differiscono solo per la posizione della virgola cioè sono del tipo $y = x \cdot 10^k$ con $k \in \mathbb{Z}$, per esempio $x = 73{,}89$ $y = 0{,}007389$, presentano i rispettivi logaritmi decimali legati dalla

$$\log y = \log(x \cdot 10^k) = k + \log x$$

ossia questi differiscono per la costante addittiva k. I logaritmi possiedono pertanto la medesima parte decimale (detta *mantissa*) mentre differiscono per la parte intera (*caratteristica*).

Un secondo sistema di logaritmi si fonda su un'altra base, pure maggiore di 1, rappresentata dal numero irrazionale

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\ldots$$

detto *numero di Nepero* (l'inventore dei logaritmi). Analogamente a quanto fatto per i logaritmi decimali si conviene di scrivere i logaritmi nella base $a = e$ nella forma[15]

$$\lg_e x = \ln x$$

e di chiamarli *logaritmi naturali* o *neperiani*. L'utilità di tale scelta apparirà chiaramente nel corso di Analisi Matematica permettendo questa base notevoli semplificazioni in numerose formule fondamentali ivi presenti. Ovviamente la

[14] Non approfondiamo qui i vecchi metodi riguardanti il calcolo logaritmico tramite le tavole in quanto i calcolatori tascabili ne hanno reso superate le ragioni.

[15] Altri autori intendono invece porre $\lg_e x = \log x$ (!).

funzione esponenziale collegata si scrive come $y = e^x$ e talvolta per ragioni tipografiche, $y = \exp x$.[16]
È interessante determinare il coefficiente che collega questi due sistemi di logaritmi così da poter passare facilmente da un sistema ad un altro. Ricordando la (2.52)

$$\lg_a x = \frac{\lg_b x}{\lg_b a}$$

e ponendo $a = e$ e $b = 10$ si ha

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e}.$$

Poiché $\log e = 0{,}43429448$, scambiando per mezzo della (2.53) la base con l'argomento $1/\log e = \ln e = 2{,}302585094$ ossia

$$\ln x = 2{,}302585094 \cdot \log x. \tag{2.55}$$

In figura 2.8 sono riportati i grafici delle funzioni $y = \log x$ e $y = \ln x$: per la relazione appena ottenuta e per quanto detto alla fine del precedente paragrafo, il grafico di $y = \ln x$ si ottiene da quello di $y = \log x$ moltiplicando quest'ultima funzione per il fattore $2{,}30\ldots$.

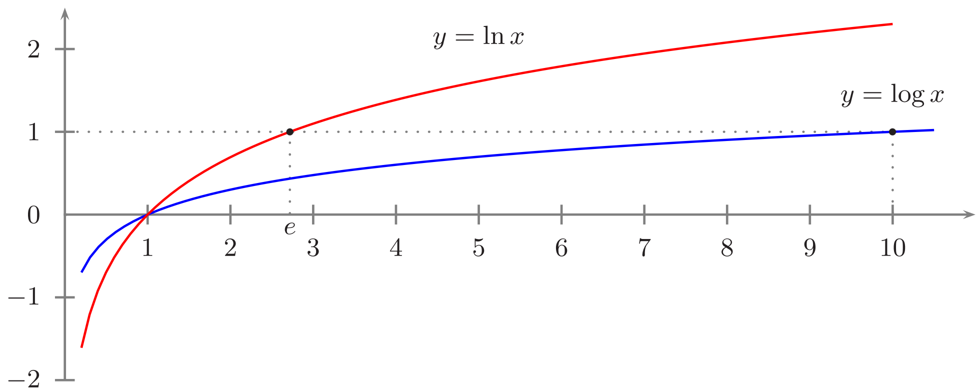


Fig. 2.8 Grafici di $y = \log x$ e $y = \ln x$.

Osserviamo infine che spesso risulta utile esprimere una funzione esponenziale di base qualsiasi a come una funzione in base e. A tal fine, utilizzando l'identità fondamentale (2.41) si ha

[16] Nei calcolatori scientifici tascabili i rispettivi tasti sono contrassegnati da `ln` e `ex`.

$$y = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}. \tag{2.56}$$

2.6 Importanza di a^x e $\lg_a x$

Le funzioni esponenziali e logaritmiche e le rispettive nozioni di potenza ad esponente reale e di logaritmo si incontrano con una certa frequenza non solo nell'ambito matematico o fisico ma anche in campi molto diversi tra loro come quello economico, chimico, biologico, geologico, archeologico. Faremo in questo paragrafo alcuni esempi in cui emerge l'uso delle nozioni finora sviluppate.

Spesso capita di dover trattare di grandezze che presentano ampie variazioni su un intervallo di diversi ordini di grandezza. Un esempio può essere la definizione della concentrazione degli ioni idrogeno H^+ in una qualsiasi soluzione acquosa. Sappiamo che tale concentrazione permette di definire il grado di acidità o basicità della soluzione e che questa può assumere dei valori appartenenti generalmente all'intervallo $[10^{-1}, 10^{-14}]$ che copre ben 14 ordini di grandezza. In tal caso anziché esprimere direttamente il valore della concentrazione si è preferito definire una nuova grandezza, indicata dal simbolo "pH" e definita dalla relazione

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+] = \log \frac{1}{[\mathrm{H}^+]}.$$

Ne segue che il pH della maggior parte delle soluzioni che si incontrano in pratica è compreso, per quanto già detto circa la concentrazione degli ioni idrogeno, tra 1 e 14. Discende inoltre dalla definizione che quanto più basso è il pH tanto più acida è la soluzione. Per esempio, una soluzione a pH $= 1$ ha una concentrazione di H^+ 100 volte superiore rispetto ad una soluzione a pH $= 3$. Siccome spesso interessa pure la concentrazione degli ioni ossidrile $[\mathrm{OH}^-]$ si pone pure

$$\mathrm{pOH} = -\log[\mathrm{OH}^+]$$

e sapendo dalle leggi dell'equilibrio chimico che il prodotto delle due concentrazioni rimane costante e pari al valore

$$[\mathrm{H}^+] \times [\mathrm{OH}^-] = 1{,}0 \cdot 10^{-14},$$

possiamo prendere il logaritmo di entrambi i membri

$$\log\{[\mathrm{H}^+] \times [\mathrm{OH}^-]\} = -14$$

dalla quale discende la $\log[\mathrm{H}^+] + \log[\mathrm{OH}^-] = -14$. Moltiplicando per -1 e a seguito delle definizioni di pH e pOH risulta

$$\mathrm{pH} + \mathrm{pOH} = 14.$$

È noto pure

soluzione neutra	$[H^+] = 10^{-7}$ moli/l	pH $= 7{,}0$
soluzione acida	$[H^+] > 10^{-7}$ moli/l	pH $< 7{,}0$
soluzione basica	$[H^+] < 10^{-7}$ moli/l	pH $> 7{,}0$.

Un risultato fisico particolarmente importante per le sue conseguenze nell'ambito della Geologia è la legge di decadimento di un corpo radioattivo. Se N è il numero di atomi di una data sostanza radioattiva (nuclide) all'istante t allora la legge con cui varia N è data da

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Se $t = 0$ discende che $N = N_0$ ossia la costante N_0 rappresenta il numero di atomi presenti all'istante iniziale. Se si vuole determinare il tempo affinché il numero iniziale si sia dimezzato allora basta porre $N = N_0/2$ e risolvere in t

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{-\lambda t}.$$

Per definizione di logaritmo $-\lambda t = \ln(1/2)$ da cui $-\lambda t = -\ln 2$ ossia

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0{,}693}{\lambda} = T_{1/2}.$$

L'espressione $T_{1/2}$ ottenuta è il *periodo di dimezzamento* del campione che per le diverse sostanze è una grandezza ben nota e può variare da pochi milionesimi di secondo (10^{-6} s) fino a $\approx$ 4,5 miliardi d'anni per l'uranio. Scelta una sostanza con un $T_{1/2}$ dell'ordine delle ere geologiche come per esempio l'Uranio–238 e l'Uranio–235 che hanno tempi di dimezzamento di circa 4460 milioni d'anni rispettivamente e 700 milioni d'anni è possibile, utilizzando la legge appena descritta, risalire alla conoscenza del tempo trascorso dalla formazione delle rocce semplicemente misurando le abbondanze relative di questi isotopi e del piombo (prodotto finale del decadimento). Analogamente in Archeologia, dove la scala temporale è dell'ordine dei millenni, converrà scegliere un isotopo dal $T_{1/2}$ più opportuno. È noto che per tali datazioni si considera in genere l'isotopo del carbonio ${}_6C^{14}$ in quanto $T_{1/2} = 5730$ anni, sostanza questa presente nei tessuti di tutte le piante ed animali.

2.6.1 ESEMPIO. *Si vuole conoscere l'età di un campione di carbone di legna dove il* 90% *del* ${}_6\mathrm{C}^{14}$ *è decaduto. In tal caso la legge di decadimento si scrive*

$$\frac{m_t}{m_0} = e^{-\lambda t}$$

dove m_t *rappresenta la massa nell'istante finale* t *e* m_0 *in quello iniziale cioè quando la pianta è morta. Risulta che* $m_t/m_0 = 1/10$ *per cui* $\frac{1}{10} = e^{-\lambda t}$ *che, per definizione di logaritmo, implica* $-\lambda t = \ln(1/10)$ *ossia*

$$t = \frac{\ln 10}{\lambda}.$$

Sostituendo in luogo di λ *la sua espressione in termini del tempo di dimezzamento* $T_{1/2}$, $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$, *si giunge a*

$$t = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cdot T_{1/2} \approx 19.000 \text{ anni.}$$

Supponiamo di depositare in una banca un capitale di 1 milione di lire. Il tasso di interesse che questa offre ai clienti è del 10% annuo, per cui alla fine del primo anno l'interesse accumulato vale $1.000.000 \times 10\% = 100.000$. Nel caso non si voglia ritirare tale somma questa va ad aggiungersi al capitale che ammonterà a lire 1.100.000 dopo un anno, somma questa su cui verrà calcolato l'interesse per l'anno successivo (il cosiddetto *montante*). Generalizzando una tale (importante!) procedura sia C il capitale iniziale, i l'interesse percentuale ed n il numero di anni trascorsi. È evidente che l'interesse dopo il primo anno è $i \cdot C$ e il capitale totale $C + i \cdot C = C(1 + i)$. L'interesse del 2° anno sarà $i \cdot [C(1 + i)]$ e il capitale $C(1+i) + iC(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$. Questa espressione suggerisce quale sarà il capitale accumulato dopo n anni,

$$M = C(1 + i)^n.$$

Se quindi si ritiene fissato C e i la legge ottenuta presenta un andamento esponenziale in quanto posto $1+i = a$ ed $n = x$ si riduce alla forma $y = Ca^x$. Per esempio si vuole conoscere il numero di anni da aspettare per poter ritirare una cifra di 2.000.000 di lire. In tal caso $2.000.000 = 1.000.000(1+0{,}1)^n$ implica $2 = (1{,}1)^n$ da cui, passando ai logaritmi $\log 2 = n \log 1{,}1$ che fornisce $n = (\log 2/\log 1{,}1) \approx 7{,}3$ anni.

La funzione esponenziale si dimostra utile pure nello studio dei modelli che simulano la crescita di popolazioni di individui di una data specie e il cui numero dipende dal tempo. In particolare in un semplice modello dove le risorse di vita per i diversi individui risultano illimitate si ottiene un andamento crescente della popolazione secondo una legge del tipo $N = N_0 e^{\lambda t}$ con N numero di individui al tempo t e N_0 al tempo iniziale $t = 0$.

2.7 Esempi ed esercizi

Proponiamo in questo paragrafo alcuni esercizi sulla funzione esponenziale, logaritmica e sulle nozioni correlate.

2.7.1 ◕◕ Esercizio. *Tracciare, nello stesso piano cartesiano le funzioni esponenziali $y = (\sqrt{2})^x$, $y = 2^x$, $y = 3^x$ e si deduca quale di queste cresce più rapidamente per valori di $x > 0$. Si descriva quindi all'aumentare di a, il comportamento della $y = a^x$ se $a > 1$. Si utilizzi a tal fine un foglio elettronico.*

2.7.2 ◔◔ Esercizio. *Tracciare i grafici delle funzioni*

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

e si dica quale delle tre decresce per $x < 0$ più rapidamente delle altre. Estendere i risultati di tale esercizio alla funzione $y = a^x$ con $0 < a < 1$ e al diminuire della base a.

2.7.3 ◕◕ Esercizio. *Disegnare nello stesso piano cartesiano, i grafici delle funzioni $y = \lg_{\sqrt{2}} x$, $\lg_2 x$, $\lg_3 x$ e dedurre quindi il comportamento della funzione logaritmica $y = \lg_a x$ con $a > 1$ all'aumentare della base. Si ripeta lo stesso procedimento nel caso che le basi siano invece rispettivamente $1/2$, $1/3$ e $1/4$.*

2.7.4 ◕◕ Esercizio. *Disegnare i grafici delle funzioni $y = 2^{-x}$ e $y = 3^{-x}$ e determinare, in entrambi i casi, il valore di x affinché y valga $1/2$.*

2.7.5 ◕◕ Esercizio. *Si dica se le seguenti espressioni sono dotate di significato: $(-3)^\pi$, $(\sqrt{\pi})^{-5}$, $(-2)^{5/6}$, $\lg_4(-16)$, $\lg_{-3} 9$, $(\lg_{1/5} 5)^{\sqrt{5}}$, $\lg_1 10$.*

2.7.6 ○○ Esercizio. *Verificare la validità delle seguenti uguaglianze:*

$$\lg_3 2187 = 7, \qquad \lg_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{16} = -2/3,$$
$$\lg_a a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = 7/8, \qquad \lg_3 \lg_8 \lg_2 16 = \lg_3 2 - 1,$$
$$2\lg_5 \sqrt[4]{5} + \frac{1}{2}\lg_{\sqrt{5}} 25 - \lg_5^2 \sqrt{5} - 2 = \frac{1}{4}.$$

Si ricordi che, come per le funzioni goniometriche, si pone $(\lg_a x)^\alpha = \lg_a^\alpha x$.

2.7.7 ◒◒ Esercizio. *Dimostrare che l'espressione*

$$\lg_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\lg_a(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

costituisce una identità.

2.7.8 ◐◐ Esercizio. *Si dica quale delle seguenti diseguaglianze è soddisfatta:*

$$\log\log\log 7 > \log^3 7 \qquad \lg_{\frac{1}{2}}\sqrt{3} < \lg_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$$
$$\lg_{\lg_3 2}\frac{1}{2} > 0 \qquad 3\lg_5 7 + \lg_7 5 + \lg_{49} 5 > 4.$$

2.7.9 ○○ Esercizio. *Facendo uso della definizione di logaritmo, determinare x in modo che valgano le seguenti espressioni:* $\lg_x 5 = 5$, $\lg_4 x = -\frac{1}{2}$, $\lg_{36} 216 = x$, $\lg_{1,5} x = 2$.

2.7.10 ◐◐ Esempio. *Dimostrare che $\lg_{a^\alpha} x^\alpha = \lg_a x$. Difatti se si esprime il primo membro nella base a utilizzando la formula per il cambiamento di base, è immediato*

$$\begin{aligned}\lg_{a^\alpha} x^\alpha &= \frac{\lg_a x^\alpha}{\lg_a a^\alpha}\\ &= \frac{\alpha\lg_a x}{\alpha\lg_a a} = \frac{\alpha\lg_a x}{\alpha} = \lg_a x.\end{aligned}$$

2.7.11 ◐◐ Esercizio. *Dimostrare che se $\lg_{ab} x = y$ allora vale pure la $\lg_a x = y(1+\lg_a b)$.*

2.7.12 ◐◐ Esercizio. *Dimostrare che $a^{\lg_{1/a} x} = \frac{1}{x}$.*

2.8 Funzioni potenza e radice

Le considerazioni esposte in questo capitolo ci hanno portato a dare significato alla scrittura a^x per ogni $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. In un tale contesto abbiamo considerato l'esponente x come la variabile mentre abbiamo mantenuto costante e data la base a. Vogliamo ora scambiare i ruoli e quindi considerare come assegnato l'esponente e variabile la base. Sceglieremo quindi per la base, la variabile indipendente $x \in \mathbb{R}_0^+$, per esponente dato a, e verrà studiata la *funzione potenza*

$$p_a : x \in \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow x^a \in \mathbb{R}^+. \tag{2.57}$$

Si noti che con l'appartenenza di x all'insieme $\mathbb{R}_0^+$ è possibile ricondurre lo studio di tale funzione a quello di una funzione composta dalle funzioni definite precedentemente. Difatti posto

$$y = x^a$$

in base alla (2.41) si può riscrivere il secondo membro come

$$y = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a\ln x}, \tag{2.58}$$

dove si sono considerati per comodità i logaritmi naturali. In effetti molti calcolatori tascabili scientifici dispongono di un tasto contrassegnato dal simbolo $\boxed{\mathtt{x^y}}$ che permette il calcolo della funzione potenza se è soddisfatta la condizione $x > 0$. L'esecuzione del calcolo avviene internamente seguendo la (2.58). Per esempio si vuole calcolare $\pi^{2,5}$. Discende quindi

$$\pi^{2,5} = e^{\ln \pi^{2,5}} = e^{2,5 \ln \pi}$$

e poiché $2{,}5 \ln \pi \approx 2{,}8618$ è anche $e^{2,8618} \approx 17{,}4934$. L'espressione (2.58) mostra anche come la funzione potenza possa essere considerata come composta da 3 funzioni

$$x \longrightarrow \ln x = t \longrightarrow at = z \longrightarrow e^z = y. \tag{2.59}$$

Poiché quindi $t = \ln x$ è monotòna crescente, se l'esponente è $a > 0$ lo sarà pure z e quindi essendo e^z crescente, anche $y = x^a$ risulterà crescente (viceversa se $a < 0$). La funzione potenza è quindi monotòna in $\mathbb{R}_0^+$ e perciò invertibile. Ovviamente, invertendo il verso delle frecce in (2.59), si giunge alla

$$p_a^{-1} : y \longrightarrow y^{\frac{1}{a}}$$

che con la solita trasformazione delle variabili diviene

$$p_a^{-1} : x \in \mathbb{R}^+ \to x^{\frac{1}{a}} \in \mathbb{R}_0^+.$$

Se, per definizione, poniamo $0^a = 0$ quando $a > 0$, allora la funzione potenza avrà sia per dominio che per codominio l'insieme $\mathbb{R}^+$ (e così anche la sua inversa): in definitiva

$$p_a : x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow x^a \in \mathbb{R}^+. \tag{2.60}$$

Trattiamo ora dei casi particolari della funzione potenza e mostriamo come in talune situazioni, risulti possibile definire dei domini più ampi di $\mathbb{R}^+$. Difatti se $a \in \mathbb{N}_0$ allora ci si riduce alla funzione potenza propriamente detta $y = x^n$ e il dominio si può estendere ad $\mathbb{R}$. Nel caso l'esponente sia pari la funzione (in $\mathbb{R}$) non è più invertibile (si pensi a $y = x^2$, equazione che rappresenta una parabola ben nota) mentre lo è se n è dispari. Difatti, in quanto l'equazione $y = x^n$ ammette un'unica soluzione reale y per n dispari, a

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^n \in \mathbb{R} \qquad n \text{ dispari},$$

corrisponde la funzione inversa radice n–esima

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \qquad n \text{ dispari.}$$

Come già accennato va comunque notato che estendendo in tal modo il dominio di scritture del tipo $y = \sqrt[n]{x}$ si perdono le proprietà formali dei radicali: ad esempio $\sqrt[3]{(-8)} = (-8)^{1/3} = -2 \neq (-8)^{2/6} = 2$ pur essendo $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Per aggirare tale ostacolo la funzione inversa in tali casi andrebbe scritta come

$$y : \begin{cases} \sqrt[n]{x}, & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-x}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

oppure in forma più compatta, utilizzando la definizione della funzione segno "sgn (x)"[17] risulta

$$y = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^{1/n}.$$

È evidente però che per i nostri scopi ciò appesantirebbe inutilmente le notazioni. Conveniamo quindi di dare significato anche ad espressioni del tipo $\sqrt[n]{x}$ anche per $x < 0$ *solo nel caso in cui la frazione* $1/n$, *con* n *dispari, sia data direttamente ridotta ai minimi termini.* In caso contrario bisognerà procedere con attenzione alle semplificazioni della frazione. Riportiamo in figura 2.9 la funzione $y = x^2$ e la sua inversa $y = \sqrt{x}$.

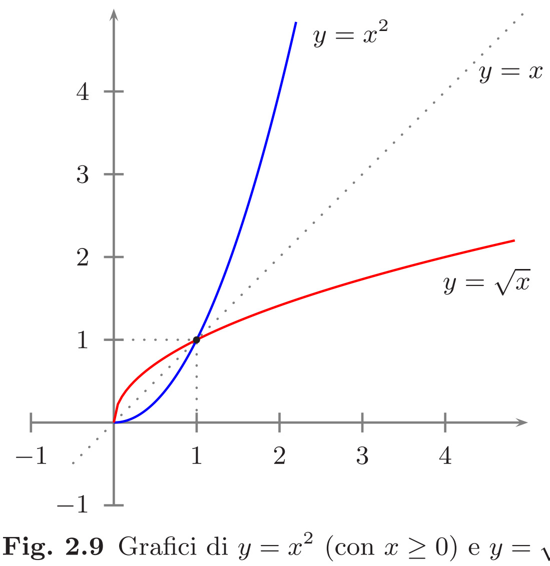


Fig. 2.9 Grafici di $y = x^2$ (con $x \geq 0$) e $y = \sqrt{x}$.

[17] Il simbolo "sgn (x)" rappresenta la funzione segno di x. Essa vale $+1$ se $x > 0$, -1 se $x < 0$, è nulla se $x = 0$. Si veda la dispensa sulle funzioni § 2.4.

Se a risulta un intero negativo o nullo cioè $a = -n$ con $n \in \mathbb{N}$ (per esempio $y = x^{-2} = 1/x^2 \ldots$) la scrittura si può estendere all'insieme $\mathbb{R}_0$. Infine, nel caso che $a > 0$ ma non è intero, sappiamo che $y = x^a$ ha per dominio $\mathbb{R}^+$ mentre se $a < 0$ e non intero, il dominio si deve restringere a $\mathbb{R}_0^+$.

2.8.1 ◕◕ Esercizio. *Tracciare in uno stesso piano cartesiano la funzione di equazione $y = x^3$ e la sua inversa. Ripetere il procedimento per $y = x^4$ e relativa inversa. Osservare come queste funzioni (e tutte quelle della forma $y = x^n$) abbiano in comune due punti del piano cartesiano e definire qualitativamente il loro comportamento all'aumentare dell'esponente.*

CAPITOLO 3

3.1 Equazioni esponenziali

Nel capitolo precedente abbiamo visto che a seguito della monotònia della funzione esponenziale, l'equazione $a^x = b$ ammette una e una sola soluzione rappresentata dalla scrittura $x = \lg_a b$, se è soddisfatta l'ipotesi $b > 0$. Pertanto la scrittura $a^x = b$ codifica la più semplice delle equazioni esponenziali e $x = \lg_a b$ la relativa soluzione. Nel caso invece si abbia $b < 0$ l'equazione non presenta alcuna soluzione in quanto $a^x > 0$ per $\forall\, x \in \mathbb{R}$. In generale comunque diremo *equazione esponenziale* una qualsiasi equazione dove l'*incognita appare ad esponente* e il problema che ci proponiamo di affrontare è quello di ricercare le soluzioni per i principali tipi di tali equazioni.

In base alla biunivocità della funzione logaritmo e nell'ipotesi che sia $b > 0$ è pure possibile procedere alla ricerca della soluzione della $a^x = b$ in un modo alternativo. Difatti considerato $a^x = x_1$ e $b = x_2$ sappiamo che

$$x_2 = x_1 \Longleftrightarrow \ln x_2 = \ln x_1 \qquad x_2, x_1 \in \mathbb{R}_0^+$$

dove per semplicità si sono considerati i logaritmi naturali. Per le posizioni poste è quindi

$$\ln a^x = \ln b \quad \Longrightarrow \quad x \ln a = \ln b$$

da cui infine

$$x = \frac{\ln b}{\ln a} = \lg_a b.$$

Vediamo ora di presentare alcuni tipi di equazioni esponenziali.

Una forma particolarmente importante di equazioni esponenziali si riassume nella scrittura

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \tag{3.61}$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono due espressioni qualsiasi contenenti l'incognita x. In tal caso per poter giungere alle soluzioni si dovrà ottenere una relazione tra le espressioni ad esponente. Ricordata quindi la biunivocità della funzione esponenziale

$$x_2 = x_1 \Longleftrightarrow a^{x_2} = a^{x_1}$$

e identificato $f(x)$ con x_2 e $g(x)$ con x_1 discende subito l'equazione equivalente

$$f(x) = g(x)$$

che non presenta più incognite ad esponente e che quindi si può risolvere con i metodi usuali. È pertanto

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x). \tag{3.62}$$

3.1.1 ◉◉ Esempio. *Vogliamo risolvere l'equazione* $3\sqrt{3^{x^2+1}} - 3^{x+2} = 0$. *Notato che questa non è ridotta alla forma "normale" definita dalla (3.61), dobbiamo innanzitutto cercare di ricondurci a tale forma. Allora riscrivendo la radice quadrata e trasportando un termine a secondo membro*

$$3\sqrt{3^{x^2+1}} - 3^{x+2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3\left(3^{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{x+2}$$

da cui per le proprietà note della scrittura esponenziale

$$3 \cdot 3^{\frac{1}{2}(x^2+1)} = 3^{x+2} \quad \Longrightarrow \quad 3^{\frac{1}{2}(x^2+1)+1} = 3^{x+2},$$

ossia

$$3^{\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}} = 3^{x+2}$$

che rientra nella forma (3.61). Ne segue pertanto che è pure $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} = x + 2$ *da cui* $x^2 - 2x - 1 = 0$ *che possiede le soluzioni* $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

3.1.2 ◉◉ Esempio. *Spesso la ricerca delle soluzioni di un'equazione è associata a delle condizioni di esistenza delle quali si deve tener conto come nel seguente esempio. Si intende risolvere la*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\sqrt{x}} = 0.$$

Posto quindi $x \geq 0$ si ha

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} - \left(\frac{1}{2}\right)^{4\sqrt{x}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4\sqrt{x}}$$

cioè

$$\begin{cases} x + 5 = 4\sqrt{x} \\ x \geq 0. \end{cases}$$

L'ultimo sistema si risolve normalmente giungendo a dimostrare l'assenza di soluzioni per l'equazione proposta.

Una generalizzazione della (3.61) è rappresentato dalla equazione

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \tag{3.63}$$

dove appaiono degli esponenziali con basi diverse. Un tale tipo si riconduce ad equazioni note solo se si sfrutta la biunivocità della funzione logaritmo come fatto nel metodo alternativo dell'esempio introduttivo. Difatti, *notato che entrambi i membri sono positivi in quanto esponenziali*, da $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ prendendo il logaritmo (per es. in base naturale) di entrambi i membri discende pure

$$\ln a^{f(x)} = \ln b^{g(x)} \quad \Longrightarrow \quad f(x)\ln a = g(x)\ln b$$

e poiché in quest'ultima, l'incognita non appare più ad esponente diventano applicabili i metodi risolutivi noti. In generale quindi

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)\lg_c a = g(x)\lg_c b \tag{3.64}$$

dove il logaritmo è relativo ad una qualsiasi base $c > 0$. Va pure notato come questo caso comprenda il precedente in quanto basta avere $b = a$ per ritrovare la (3.62).

3.1.3 ◉◉ Esempio. *Risolvere $7^{x^2-4} - 6^{2x} = 0$. L'equazione assegnata è equivalente a $7^{x^2-4} = 6^{2x}$ da cui prendendo il logaritmo nella base 7 si ha $\lg_7(7^{x^2-4}) = \lg_7 6^{2x}$ che si riduce, per le proprietà dei logaritmi, a $(x^2-4)\lg_7 7 = 2x\lg_7 6$. Ne segue l'equazione di II grado, $x^2 - 2x\lg_7 6 - 4 = 0$, che ha per soluzioni $x = \lg_7 6 \pm \sqrt{\lg_7^2 6 + 4}$.*

3.1.4 ◉◉ Esempio. *Risolvere $8^{(1/x)} - \sqrt{3^x} = 0$. Dopo aver posto $x \neq 0$ si procede come nelle precedenti così da giungere alla forma (3.63)*

$$2^{\frac{3}{x}} = 3^{\frac{1}{2}x}$$

che a seguito della biunivocità dei logaritmi di base 2, implica

$$\lg_2 2^{\frac{3}{x}} = \lg_2 3^{\frac{1}{2}x}$$

ossia

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{2}x \lg_2 3.$$

Moltiplicando per $2x$ *si giunge alla* $6 = x^2 \lg_2 3$ *che, per la positività di* $\lg_2 3$ *conduce alle soluzioni* $x = \pm\sqrt{6/\lg_2 3}$.

Un'ulteriore generalizzazione della (3.64) che si risolve nello stesso modo è rappresentata dalla scrittura

$$\alpha \cdot a^{f(x)} = \beta \cdot b^{g(x)} \tag{3.65}$$

dove α e β sono dei semplici coefficienti numerici. Di questa portiamo alcuni esercizi esemplificativi.

3.1.5 Esempio. *Risolvere l'equazione* $5 \cdot 7^x = 3\sqrt{2^{x^2-1}}$. *Essendo già nella forma (3.65) e assicurataci la positività di entrambi i membri, prendiamo il loro logaritmo nella base 7 (qualsiasi altra base andrebbe comunque bene)*

$$\lg_7 (5 \cdot 7^x) = \lg_7 \left(3\sqrt{2^{x^2-1}}\right).$$

Utilizzando le note proprietà si giunge alla

$$\lg_7 5 + x = \lg_7 3 + \frac{1}{2}(x^2 - 1) \lg_7 2$$

che porta dopo alcuni passaggi all'equazione di II grado $x^2 \lg_7 2 - 2x + \lg_7 \left(\frac{9}{50}\right) = 0$. *Questa, in quanto il suo discriminante risulta essere* $\Delta = 1 - \lg_7 2 \lg_7 (9/50) > 0$ *poiché* $\lg_7 9/50 < 0 \wedge \lg_7 2 > 0$, *ammette le due soluzioni* $x = 1 \pm \sqrt{\Delta}$.

3.1.6 Esempio. $2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}} = 6$. *Questa equazione non sembra rientrare nel tipo rappresentato dalla (3.65). D'altra parte, posto* $x \neq 0$ *dividendo per* 2^x *discende*

$$2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}} = 6 \quad \Longrightarrow \quad 3^{\frac{1}{x}} = \frac{6}{2^x} \quad \Longrightarrow \quad 3^{\frac{1}{x}} = 6 \cdot 2^{-x},$$

che quindi considerando i logaritmi (in base 3) di entrambi i membri, è equivalente alla $\frac{1}{x} = \lg_3 6 - x \lg_3 2$. *Moltiplicando per* x *e ordinata l'equazione, si ottiene* $x^2 \lg_3 2 - x \lg_3 6 + 1 = 0$. *Avendo questa* $\Delta = \lg_3^2 6 - 4 \lg_3 2 > 0$, *discendono due soluzioni accettabili date da* $x = (\lg_3 6 \pm \sqrt{\Delta})/2 \lg_3 2$. *Notiamo infine che al medesimo risultato si può giungere prendendo i logaritmi di entrambi i membri pur con l'equazione ancora espressa nella forma originaria.*

Dagli esempi sin qui riportati si può vedere come per giungere alla risoluzione delle equazioni, queste devono presentarsi generalmente sotto forma di prodotti o quozienti di esponenziali. Difatti già per l'equazione $3^x = 2^{-x} + 5$, dove compare una somma di due termini, non è più possibile applicare i metodi esposti e procedere alla sua soluzione. Vedremo, dopo aver approfondito lo studio di funzioni come si possa ancora in taluni casi, far uso di una interpretazione grafica dei vari termini e quindi con teoremi dell'Analisi, dimostrare l'esistenza o meno di soluzioni.
Un caso che comunque si presenta con una certa frequenza ed è riconducibile a semplici equazioni esponenziali rientra nella forma

$$\alpha a^{2x} + \beta a^x + \gamma = 0 \tag{3.66}$$

che a sua volta risulta essere un caso particolare della

$$\phi[f(x)] = 0 \tag{3.67}$$

con ϕ espressione dipendente da $f(x)$. Nel caso della (3.66), la $f(x)$ rappresenta la funzione esponenziale cioè $f(x) = a^x$ e ϕ è un polinomio di II grado (per esempio $3^{2x} + 3^x - 2 = 0$). Un ulteriore esempio può servire per chiarire l'aspetto di tali equazioni e come va avviato il procedimento risolutivo: in $2^{3x} - 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$ si ha $y = f(x) = 2^x$ e $\phi(y) = y^3 - y^2 - 4y + 4$. Si intuisce ora come va impostata la risoluzione:

a) si pone $f(x) = y$ riducendo l'equazione $\phi[f(x)] = 0$ alla forma più semplice $\phi(y) = 0$,
b) si risolve l'equazione in y, $\phi(y) = 0$ determinando in tal modo un certo numero di valori $y = y_1$, $y = y_2 \ldots$
c) si sostituisce in queste ultime la $f(x)$ originaria ottenendo un ugual numero di semplici equazioni che, nel caso sia $f(x) = a^x$ sono del tipo $a^x = y_1$, $a^x = y_2 \ldots$ e che si risolvono normalmente.

Riprendendo gli esempi, posto $y = 3^x$ nella prima e $y = 2^x$ nella seconda si ottiene rispettivamente un'equazione di 2° grado e una di 3°. La prima ha per soluzioni $y = 1 \veebar y = -2$ ossia $3^x = 1 \veebar 3^x = -2$ da cui l'unica soluzione $x = 0$ mentre la seconda, scomposta in fattori $(y-1)(y^2-4) = 0$ fornisce $y = 1$ e $y = \pm 2$. Queste implicano poi $2^x = 1$ cioè $x = 0$ e $2^x = 2$ risolta da $x = 1$.

3.1.7 ☻☻ Esercizio. *Risolvere la* $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$ *dimostrando che ammette soluzioni per* $x = \frac{3}{2}$ e $x = -\frac{1}{2}$.

Un ultimo genere di equazioni presenta le basi degli esponenziali dipendenti a loro volta dall'incognita. Si ha pertanto

$$[f(x)]^{g(x)} = [h(x)]^{i(x)}\,. \tag{3.68}$$

Per quanto già detto circa la funzione potenza queste espressioni hanno, in generale, significato se *le basi sono positive.* Allora, e solo allora, è possibile prendere il logaritmo di entrambi i membri ed ottenere

$$g(x)\lg_a f(x) = i(x)\lg_a h(x).$$

In definitiva la (3.68) è equivalente al sistema misto

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ g(x)\lg_a f(x) = i(x)\lg_a h(x). \end{cases}$$

A seconda delle particolari espressioni di f, g, h e i, tale sistema può non esaurire completamente tutte le possibilità insite nella (3.68) in quanto può capitare che per certi valori di x gli esponenti siano dei numeri interi. In tal caso le basi possono anche essere negative e quindi tale eventualità va studiata con attenzione e trattata caso per caso. Si vedano a tal proposito gli ultimi due esercizi proposti in questa sezione.

Onde evitare possibili errori va ribadito un punto importante nella risoluzione di tali equazioni ossia che *tutte le volte che si considerano i logaritmi di entrambi i membri di un'equazione, questi ultimi devono essere stati posti preventivamente positivi.* In caso contrario non è possibile procedere sfruttando la biunivocità del logaritmo e l'equazione (o come vedremo, disequazione) va discussa in altro modo (generalmente bastano poche osservazioni per trattare queste eventualità).

3.1.8 Esempio. *Risolvere l'equazione* $x^{x^2-5x-6} = 1$. *Qui* $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - 5x - 6$, $h(x) = i(x) = 1$. *Posto perciò* $x > 0$ *e preso il logaritmo per entrambi i membri si ha*

$$\begin{cases} x > 0 \\ (x^2 - 5x - 6)\ln x = 0. \end{cases}$$

Discende che l'equazione $x^2 - 5x - 6 = 0$ *possiede le due soluzioni* $x = 6$, $x = -1$ *di cui solo la prima risulta accettabile, mentre per* $\ln x = 0$, $x = 1$. *In definitiva le soluzioni sono i valori* $x = 6$ *e* $x = 1$.

3.1.9 ◑◑ Esempio. $3^{x^2-x^4+7} + 25 = 0$ *è una equazione che si riduce alla forma* $3^{x^2-x^4+7} = -25$ *e dove il secondo membro è un numero negativo. In tal caso sarebbe un grave errore prendere i logaritmi di entrambi i membri (d'altra parte* $\lg_3(-25)$ *non avrebbe significato). Poiché però il primo membro è positivo per ogni* x *reale, allora segue che l'equazione non può ammettere soluzioni.*

3.1.10 ◑◑ Esercizio. *Risolvere la* $(x+1)^x = -(1/8)$. *Le condizioni generali per l'esistenza del primo membro implicherebbero* $x + 1 > 0$ *ma in tal caso* *quest'ultimo sarebbe un numero positivo per cui questa eventualità non fornisce alcuna soluzione. Rimane la possibilità che x sia un numero intero dispari riducendo in tal modo il primo membro ad una potenza ordinaria. Poniamo quindi $x = 2n + 1$ con $n \in \mathbb{N}$ in quanto una potenza pari può solo fornire valori positivi e non negativi. Dev'essere inoltre $x + 1 < 0$ cioè sostituendo $2n + 2 < 0$ ossia $n < -1$. L'equazione si può ora riscrivere...*

3.1.11 ⦿⦿ Esercizio. *Tenendo presenti le definizioni date per la funzione potenza, dimostrare che l'equazione*

$$(x^2 + x - 57)^{3x^2+3} = (x^2 + x - 57)^{10x}$$

possiede le radici $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{233})/2$, $x_3 = 1/3$, $x_4 = 3$, $x_5 = (-1 + \sqrt{229})/2$ e $x_6 = 7$.[18]

3.2 Disequazioni esponenziali

Il problema della ricerca delle soluzioni di una disequazione esponenziale si riporta, analogamente a quanto fatto per altri tipi di disequazioni, alla risoluzione delle relative equazioni associate. In questo caso va comunque posta particolare attenzione alla base degli esponenziali in quanto si sfrutta la proprietà di monotònia della funzione e questa, come sappiamo, dipende dal particolare valore della base. Parallelamente alle equazioni studiate nel precedente paragrafo abbiamo quindi le seguenti disequazioni, che a seguito della monotònia crescente dell'esponenziale per $a > 1$ sono equivalenti a quelle riportate a fianco:

$$\begin{aligned} a^x > b &\iff x > \lg_a b \\ a^{f(x)} > a^{g(x)} &\iff f(x) > g(x), \end{aligned} \tag{3.69}$$

oppure se $0 < a < 1$, alle

$$\begin{aligned} a^x > b &\iff x < \lg_a b \\ a^{f(x)} > a^{g(x)} &\iff f(x) < g(x). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Nel caso si abbia $a^{f(x)} > b^{g(x)}$, prendendo i logaritmi di entrambi i membri in una base qualsiasi c (in genere quella naturale) e tenendo conto della sua monotònia strettamente crescente discende invece

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \iff f(x) \ln a > g(x) \ln b. \tag{3.71}$$

Quando non è necessario giungere al calcolo esplicito dei risultati numerici è spesso conveniente considerare come base dei logaritmi una delle due basi della

[18] Un ringraziamento allo studente Luca Pertile di Asiago per avermi fatto notare l'esistenza della soluzione pari ad 1/3 in tale esercizio.

disequazione di partenza. Allora nel caso che sia $a > 1$ la (3.71) si semplifica e diventa

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) > g(x) \lg_a b, \tag{3.72}$$

mentre se $0 < a < 1$

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) < g(x) \lg_a b \tag{3.73}$$

Sempre prendendo il logaritmo di entrambi i membri si dovranno affrontare disequazioni del tipo

$$\alpha \cdot a^{f(x)} > \beta \cdot b^{g(x)} \tag{3.74}$$

oppure

$$[f(x)]^{g(x)} > [h(x)]^{i(x)}, \tag{3.75}$$

mentre la forma

$$\phi[f(x)] > 0 \tag{3.76}$$

va prima ridotta con la solita posizione intermedia $y = f(x)$, alla $\phi(y) > 0$. Riportiamo di seguito un certo numero di esempi ed esercizi.

3.2.1 Esempio. *Risolvere*

$$\frac{8}{\sqrt[4]{3^x}} - 256 \leq 0.$$

Dividendo per 8*, trasportando un termine nell'altro membro e riscritta la radice come esponente, si ottiene*

$$\frac{1}{(3^x)^{\frac{1}{4}}} \leq 32 :$$

da cui $(3^x)^{-\frac{1}{4}} \leq 2^5$*. Per le proprietà degli esponenziali è anche* $3^{-(x/4)} \leq 2^5$ *da cui prendendo il logaritmo in base* $3 > 1$ *di entrambi i membri discende*

$$-\frac{x}{4} \leq \lg_3 2^5 \quad \textit{cioè} \quad -\frac{x}{4} \leq 5 \lg_3 2.$$

Quest'ultima fornisce infine $x \geq -20 \lg_3 2$.

3.2.2 Esempio. *Si vuole risolvere la* $15^{2x+4} - 3^{3x} \cdot 5^{4x-4} \leq 0$. *Se trasportiamo il secondo addendo del I membro abbiamo* $15^{2x+4} \leq 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}$, *forma che apparentemente non rientra in nessuno dei casi esposti. Prendendo però il logaritmo in base* $5 > 1$ *si deduce* $\lg_5(15^{2x+4}) \leq \lg_5 \left(3^{3x} \cdot 5^{4x-4}\right)$ *che, per le proprietà dei logaritmi si riscrive*

$$(2x+4)\lg_5 15 \leq 3x \lg_5 3 + 4x - 4$$

e che rappresenta una disequazione di I grado facilmente risolvibile. Notando però anche $15^{2x+4} = (3 \cdot 5)^{2x+4} = 3^{2x+4} \cdot 5^{2x+4}$ *è possibile ricondurre la disequazione alla forma* $3^{2x+4} \cdot 5^{2x+4} \leq 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}$ *dalla quale dividendo per* $5^{2x+4} \cdot 3^{3x} > 0$, *si giunge alla* $3^{4-x} \leq 5^{2x-8}$ *che rientra nei casi già discussi.*

3.2.3 Esempio. *È data la* $(3 + \operatorname{sen} x)^{\frac{x^2-4}{x+10}} \leq 1$. *Osservato che* $3 + \operatorname{sen} x > 0$ *per* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, *l'unica restrizione da porre discende dall'esistenza del rapporto ad esponente* $x \neq -10$. *Poiché pure il secondo membro è positivo, prendendo i logaritmi naturali di entrambi i membri e considerandone le proprietà si ottiene*

$$\frac{x^2-4}{x+10}\ln(3 + \operatorname{sen} x) \leq 0.$$

Poiché $\ln(3 + \operatorname{sen} x) > 0$ *in quanto* $2 \leq 3 + \operatorname{sen} x \leq 4$ *dev'essere* $\frac{x^2-4}{x+10} \leq 0$. *Studiatone il segno si giunge alle soluzioni* $]-\infty, -10[\,\cup\,]-2, 2[$.

3.2.4 Esempio. *Sia* $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} - 1 \leq 0$ *la disequazione da risolvere. Appare chiaro che questa è del tipo* $\phi[f(x)] \leq 0$ *con* $f(x) = \sqrt{x}$. *Posta quindi la condizione di esistenza della radice* $x \geq 0$ *e sostituito* $y = \sqrt{x}$, *la disequazione diviene* $2^y - 2^{1-y} - 1 \leq 0$. *Utilizzando le solite proprietà* $2^y - 2^1 \cdot 2^{-y} - 1 \leq 0$ *e moltiplicando entrambi i membri per* $2^y > 0$ *si giunge a* $(2^y)^2 - 2^y - 2 \leq 0$. *Posto ancora* $2^y = t$ *la disequazione di 2° grado* $t^2 - t - 2 \leq 0$ *ha per soluzioni* $-1 \leq t \leq 2$ *che equivalgono al sistema*

$$\begin{cases} 2^x \geq -1 \\ 2^x \leq 2. \end{cases}$$

La prima è sempre soddisfatta in $\mathbb{R}$ *mentre la seconda* $2^x \leq 2^1$ *fornisce* $x \leq 1$, *insieme che rappresenta pure le soluzioni.*

3.2.5 ◔◔ Esercizio. $\dfrac{7}{9^x - 2} \geq \dfrac{2}{3^x - 1}$. Sol.: $[-\lg_3 2, 0[\cup]\frac{1}{2}\lg_3 2, 1]$

3.2.6 ◕◕ Esercizio. $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} < 50$. Sol.: $]-\infty, -1 - 1/\lg_2 5[\cup]-1, 2[$

Come si può quindi vedere i metodi ricalcano quelli già trattati con la sola attenzione di considerare la proprietà di monotònia anziché quella di biunivocità nel caso di disequazione in senso stretto ($<$ o $>$), di entrambe nei casi rimanenti ($\leq$ o $\geq$). Nel prossimo paragrafo si considereranno quindi direttamente i metodi risolutivi delle disequazioni.

3.3 Equazioni e disequazioni logaritmiche

Analogamente alle esponenziali si riconoscono come equazioni e disequazioni logaritmiche se, ridotte alla forma più semplice, l'incognita compare ad argomento di logaritmi. Per la loro risoluzione ci si deve ricondurre in genere ad una delle forme $\lg_a f(x) \geq \lg_a g(x)$ o $\lg_a f(x) \leq \lg_a g(x)$, dalle quali per le proprietà di monotònia dei logaritmi (2.37) e (2.38) discendono disequazioni equivalenti del tipo $f(x) \geq g(x)$ o $f(x) \leq g(x)$. In particolare se

$$a > 1 \qquad \lg_a f(x) \leq \lg_a g(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq g(x)$$

mentre se

$$0 < a < 1 \qquad \lg_a f(x) \leq \lg_a g(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq g(x).$$

Va comunque ricordato che prima di procedere in base alle precedenti disequazioni ci si deve assicurare della positività degli argomenti dei logaritmi $f(x)$ e $g(x)$ in quanto, come sappiamo, il dominio della funzione logaritmo è $\mathbb{R}_0^+$. Solo così le disequazioni di partenza hanno significato. Le precedenti pertanto si completano nelle

$$a > 1 \qquad \lg_a f(x) \leq \lg_a g(x) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \tag{3.77}$$

e

$$0 < a < 1 \qquad \lg_a f(x) \leq \lg_a g(x) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \tag{3.78}$$

Altre volte la forma cui ci si riduce può presentare l'incognita ad argomento di un logaritmo presente in uno solo dei due membri cioè apparire come

$$\lg_a f(x) > b. \tag{3.79}$$

In tal caso può risultare più conveniente utilizzare la monotònia della funzione esponenziale. Considerando l'esponenziale nella base a di entrambi i membri

$$a > 1 \quad \lg_a f(x) > b \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ a^{\lg_a f(x)} > a^b \end{cases}$$

che implica per la (2.41)

$$a > 1 \quad \lg_a f(x) > b \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^b. \end{cases}$$

Analogamente per i restanti valori di a

$$0 < a < 1 \quad \lg_a f(x) > b \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^b. \end{cases}$$

3.3.1 Esempio. *Risolviamo la* $\lg_{0,5}(x+6) - \lg_{0,5}(x^2+1) + 2 < 0$. *Poste le condizioni di esistenza* $x + 6 > 0 \wedge x^2 + 1 > 0$, *per le proprietà dei logaritmi si può riscrivere la disequazione come*

$$\begin{cases} x + 6 > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \\ \lg_{0,5}\left(\dfrac{x+6}{x^2+1}\right) < -2 \end{cases}$$

che rientra nella (3.79). Risolte le prime due per $x > -6$ *e prendendo l'esponenziale in base* $0{,}5 < 1$ *dei due membri discende*

$$\begin{cases} x > -6 \\ \dfrac{x+6}{x^2+1} > (0{,}5)^{-2}. \end{cases}$$

La seconda disequazione si può riscrivere quindi come

$$\frac{x+6}{x^2+1} > 4$$

da cui la disequazione di secondo grado $4x^2 - x - 2 < 0$. *Procedendo al solito modo si trovano soluzioni per* $x \in](1-\sqrt{33})/8, (1+\sqrt{33}/8)[$.
Notiano che anziché considerare gli esponenziali si poteva riscrivere -2 *come* $-2 = -2\lg_{0,5} 0{,}5 = \lg_{0,5}(0{,}5)^{-2}$, *ricondursi al caso (3.78) e proseguire utilizzando la monotònia del logaritmo.*

3.3.2 Esempio. $\lg_4 \lg_2 \lg_3(2x+1) > \frac{1}{2}$. *Posto* $2x + 1 > 0$ *si considera l'esponenziale di entrambi i membri nella base 4. Ne segue* $\lg_2 \lg_3(2x+1) > 4^{1/2}$ *ossia* $\lg_2 \lg_3(2x+1) > 2$. *Ripetendo il medesimo procedimento e notando che le basi rimanenti sono tutte maggiori di 1, si ha*

$$\lg_3(2x+1) > 2^2 \quad \textit{e quindi} \quad (2x+1) > 3^4.$$

Abbiamo pertanto

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 2x + 1 > 81 \end{cases}$$

che possiede le soluzioni $x > 40$.

3.3.3 ESEMPIO. $\lg_\pi(15-x) - \lg_\pi |2x+1| < \lg_\pi |x|$. *Le condizioni da porre per l'esistenza della disequazione sono* $15 - x > 0 \wedge x \neq -\frac{1}{2}, 0$ *per cui discende immediatamente la*

$$\lg_\pi \left(\frac{15-x}{|2x+1|} \right) < \lg_\pi |x|.$$

Per la monotònia crescente dei logaritmi in base $\pi > 1$ *si giunge al sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{15-x}{|2x+1|} < |x| \\ x < 15 \\ x \neq -\frac{1}{2}, 0 \end{cases}$$

che, risolto, fornisce poi le soluzioni.

3.3.4 ◔◔ ESERCIZIO. *Risolvere* $\lg_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} < 0$.

Un altro genere di disequazioni logaritmiche coinvolge espressioni dove la variabile appare pure nella base dei logaritmi ossia

$$\lg_{f(x)} g(x) > \lg_{h(x)} i(x). \tag{3.80}$$

In tali casi conviene porre le condizioni di esistenza e quindi passare a logaritmi a base fissa. Si ha pertanto il seguente sistema

$$\begin{cases} f(x) > 0 \wedge f(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \wedge h(x) \neq 1 \\ i(x) > 0 \\ \lg_{f(x)} g(x) > \lg_{h(x)} i(x) \end{cases}$$

e dove si è tenuto presente che le basi dei logaritmi sono numeri positivi diversi da 1. Esprimendo quindi i logaritmi nella base naturale la si può riscrivere

$$\frac{\ln g(x)}{\ln f(x)} > \frac{\ln i(x)}{\ln h(x)},$$

e quindi se possibile, si cercherà di riportarsi a situazioni già note. Un caso particolare ma frequente della (3.80) si ha quando il secondo membro è pari ad una costante.

3.3.5 ESEMPIO. $\lg_x \sqrt{21-4x} > 1$. *Le condizioni di esistenza da soddisfare sono* $x > 0 \wedge x \neq 1$ e $21 - 4x > 0$, *per cui esprimendo il primo membro nella base e la disequazione assume la forma*

$$\frac{\ln \sqrt{21-4x}}{\ln x} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\ln \sqrt{21-4x} - \ln x}{\ln x} > 0.$$

Per le proprietà dei logaritmi l'ultima diviene

$$\frac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{21-4x}}{x}\right)}{\ln x} > 0:$$

studiato il segno del numeratore e del denominatore e intersecato il risultato con le condizioni iniziali, le soluzioni ottenute appartengono all'intervallo aperto $]1,3[$.

3.3.6 ESEMPIO. $\lg_5 x - \lg_x 5 \le \frac{3}{2}$. *Posto* $x > 0 \wedge x \neq 1$ *il secondo termine si può riportare alla base 5 per cui scriviamo la disequazione come*

$$\lg_5 x - \frac{\lg_5 5}{\lg_5 x} \le \frac{3}{2} \quad \textit{ossia} \quad lg_5 x - \frac{1}{\lg_5 x} \le \frac{3}{2}.$$

Introdotta l'incognita ausiliaria $y = \lg_5 x$ *si giunge alla*

$$y - \frac{1}{y} \le \frac{3}{2} \quad \textit{e quindi a} \quad \frac{y^2 - (3/2)y - 1}{y} \le 0$$

che ha per soluzioni $y \le -\frac{1}{2}$ *e* $0 < y \le 2$. *Ritornando all'incognita* x, *si trovano le soluzioni* $0 < x \le (1/\sqrt{5}) \veebar 1 < x \le 25$.

3.4 Esercizi di vario tipo

Proponiamo qui una breve raccolta di esercizi di vario genere e, per alcuni, diamo anche lo sviluppo risolutivo completo.

3.4.1 ◔◔ ESERCIZIO. *Tenuto conto delle proprietà dimostrate valide per i logaritmi si considerino le equazioni seguenti come rappresentative di altrettante funzioni. Determinare il dominio di ciascuna chiarendo se le diverse coppie rappresentano la medesima funzione:*

1) $y = \ln x^2$ $\qquad y = \ln|x|$

2) $y = \ln x^2$ $\qquad y = 2\ln x$

3) $y = \ln(x-2)(4-x)$ $\qquad y = \ln(x-2) + \ln(4-x)$

4) $y = \ln(x-2)(4-x)$ $\qquad y = \ln(-x^2 + 6x - 8)$

5) $y = \lg_a(5-x)^5$ $\qquad y = \frac{1}{2}\lg_a(5-x)^{10}$

6) $y = \log(x+1) - \log\left(x + \frac{x}{x+1}\right)$ $\qquad y = \log(x^2 + x + 1)$.

3.4.2 ◔◔ ESERCIZIO. *Ricordando le proprietà delle trasformazioni di simmetria e delle traslazioni, dedurre il grafico delle funzioni espresse dalle equazioni (per alcune conviene comporre più trasformazioni).*

1) $y = e^{x+1}$	*2)* $y = \ln\|x\|$
3) $y = \|\ln x\|$	*4)* $y = e^{\|x\|}$
5) $y = \ln(x-1)$	*6)* $y = -e^{x-1}$
7) $y = \ln\|x-1\|$	*8)* $y = \frac{1}{2}\ln(x+5)^2$
9) $y = \frac{1}{e^{x+5}}$	*10)* $y = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

3.4.3 ◔◔ ESERCIZIO. *Tramite un foglio di calcolo si studi il grafico della funzione*

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

In particolare si analizzi "sperimentalmente" l'andamento per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Verso quale valore reale sembra convergere la y? Si determini il minimo valore di $x > 0$ che fornisce la quarta cifra decimale corretta per il limite di y. Sol.: $x = 16.610$

3.4.4 ESEMPIO. *Risolvere l'equazione $x^{4x} = 1$.*
Innanzitutto ricerchiamo possibili soluzioni che soddisfano alla condizione $x > 0$. In tal caso l'equazione si può riscrivere come

$$\begin{cases} x > 0 \\ e^{4x \ln x} = 1. \end{cases}$$

L'esponente pertanto dev'essere nullo ossia $4x \ln x = 0$ condizione che conduce alla $\ln x = 0$ risolta da $x = 1$: il valore $x = 0$ non è invece accettabile per la condizione posta $x > 0$.
Cerchiamo ora soluzioni particolari: queste si ottengono a seguito del fatto che, come notato discutendo della funzione potenza, quest'ultima risulta definita anche nel caso di base negativa ed esponente intero relativo (pari e/o dispari). Pertanto se $x < 0$ l'esponente non può che essere intero per cui poniamo $4x = -n$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$ e dove si è scelto di esplicitare il segno negativo. L'equazione si può riscrivere come

$$\left(-\frac{n}{4}\right)^{-n} = 1$$

che implica

$$\frac{1}{\left(-\frac{n}{4}\right)^n} = 1 \quad \text{o anche} \quad \left(-\frac{n}{4}\right)^n = 1.$$

Quest'ultima si può scomporre nel prodotto

$$(-1)^n \left(\frac{n}{4}\right)^n = 1,$$

e poiché il secondo fattore è positivo lo deve pure essere il primo: l'intero n *dovrà quindi essere un intero pari. Fatta l'ulteriore posizione* $n = 2t$ $(t \in \mathbb{N})$ *abbiamo l'equazione*

$$\left(\frac{2t}{4}\right)^{2t} = 1$$

alla quale possiamo applicare il procedimento sviluppato nella prima parte dove tutti i termini a primo membro risultavano positivi. Si giunge pertanto alla

$$2t \ln \frac{t}{2} = 0 \quad \textit{e quindi alla} \quad \frac{t}{2} = 1 \quad \textit{e} \quad t = 2.$$

Da questa otteniamo $n = 2t = 4$ *e* $x = -\frac{n}{4} = -1$*: in definitiva le soluzioni sono* $x = \pm 1$.

3.4.5 Esempio. *Risolvere la disequazione* $\lg_{\cos x} \operatorname{sen} x + \lg_{\operatorname{sen} x} \cos x \leq 2$.
Poste le condizioni di esistenza

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{sen} x < 1 \\ 0 < \cos x < 1 \end{cases}$$

che limitano i valori possibili di x *al I quadrante estremi esclusi, la disequazione si può riscrivere nella base naturale come*

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{sen} x < 1 \\ 0 < \cos x < 1 \\ \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \cos x} + \dfrac{\ln \cos x}{\ln \operatorname{sen} x} \leq 2 \end{cases}$$

Riportata l'ultima disequazione nella forma canonica

$$\frac{\ln^2 \operatorname{sen} x + \ln^2 \cos x - 2 \ln \cos x \ln \operatorname{sen} x}{\ln \cos x \ln \operatorname{sen} x} \leq 0$$

e notato che il numeratore risulta positivo o nullo in quanto è un quadrato di un binomio, si ottiene

$$\frac{(\ln \operatorname{sen} x - \ln \cos x)^2}{\ln \cos x \ln \operatorname{sen} x} \leq 0.$$

D'altra parte, poiché le condizioni di esistenza implicano che entrambi i fattori del denominatore abbiano segno negativo cosicché il denominatore risulta positivo, l'unica possibilità per l'esistenza di soluzioni è che sia

$$(\ln \operatorname{sen} x - \ln \cos x)^2 = 0 \quad \textit{ossia} \quad \ln \operatorname{sen} x - \ln \cos x = 0.$$

Ne discende $\ln \operatorname{sen} x = \ln \cos x$ *cioè* $\operatorname{sen} x = \cos x$*: questa è risolta solo da* $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *in quanto i rimanenti valori* $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ *non soddisfano alle condizioni di esistenza.*

Concludiamo suggerendo due esercizi di una certa difficoltà:

3.4.6 ⦿⦿ ESERCIZIO. *Risolvere la disequazione* $|\lg_a x - 2| - \lg_a^2 x > 0$ *con* $a \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$.

Sol.: $a > 1$, $]a^{-2}, a[$; $0 < a < 1$, $]a, a^{-2}[$

3.4.7 ⦿⦿ ESERCIZIO. *Per quali valori di a la disequazione*

$$\lg_{\left(\frac{a}{a+1}\right)}(x^2 + 2) > 1$$

è soddisfatta per $\forall\, x \in \mathbb{R}$*?* Sol.: $a < -2$

APPENDICE

Formulario

- Radici aritmetiche: se $a, b \in \mathbb{R}_0^+$

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\
\sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\
\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} &= \sqrt[nk]{a^{n+k}} \\
\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[nk]{a^{k-n}} \\
\left(\sqrt[n]{a}\right)^k &= \sqrt[n]{a^k} \\
\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[nk]{a} \\
\sqrt[nk]{a^k} &= \sqrt[n]{a}.
\end{aligned}
$$

- Potenze con esponente reale qualsiasi: $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
(ab)^\alpha &= a^\alpha b^\alpha \\
\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha &= \frac{a^\alpha}{b^\alpha} \\
a^\alpha a^\beta &= a^{\alpha+\beta} \\
\left(\frac{a^\alpha}{a^\beta}\right) &= a^{\alpha-\beta} \\
(a^\alpha)^\beta &= a^{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

- Proprieta di monotònia:

$$
\begin{array}{rcl}
a > 1 & \Longrightarrow & x_2 > x_1 \Longleftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1} \\
0 < a < 1 & \Longrightarrow & x_2 > x_1 \Longleftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1} \\
a > 1 \ \wedge \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ & & x_2 > x_1 \Longleftrightarrow \lg_a x_2 > \lg_a x_1 \\
0 < a < 1 \ \wedge \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ & & x_2 > x_1 \Longleftrightarrow \lg_a x_2 < \lg_a x_1
\end{array}
$$

- Identità fondamentali:

$$f^{-1}[f(x)] = \lg_a a^x = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
$$f[f^{-1}(y)] = a^{\lg_a y} \ = y \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}_0^+$$

- Proprietà dei logaritmi:

$$xz > 0 \iff \lg_a(xz) = \lg_a |x| + \lg_a |z|$$
$$xz > 0 \iff \lg_a\left(\frac{x}{z}\right) = \lg_a |x| - \lg_a |z|$$
$$\alpha \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}_0^+ \iff \lg_a x^\alpha = \alpha \lg_a x$$

- Formula del cambiamento di base:

$$\lg_a x = \frac{\lg_b x}{\lg_b a}$$

- Principali equazioni e disequazioni:

$$a > 1 \qquad a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \iff f(x) \geq g(x)$$
$$0 < a < 1 \qquad a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \iff f(x) \leq g(x)$$

$$a > 1 \qquad \lg_a f(x) \leq \lg_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \qquad \lg_a f(x) \leq \lg_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$$